

# EN DISKUSSION AF MODELLER FOR TRANSPORTMIDDELVALG

Otto Anker Nielsen  
Instituttet for Planlægning (IFP)  
Danmarks Tekniske Universitet (DTU)  
Bygning 115, 2800 Lyngby  
Telefon 45 25 15 14; Fax 45 93 64 12; Email onielsen@ivtb.dtu.dk

## 1 INTRODUKTION

I dagens praksis er logitmodellen den hyppigst benyttede model for transportmiddelvalg, og oftest formuleres den med en lineær nyttefunktion. Den udbredte brug af denne model-formulering skyldes blandt andet, at den er matematisk bekvem at benytte, samt at den er implementeret i de gængse udenlandske softwarepakker. Ofte hævdes kritik af udformningen af nyttefunktionen samt mere bredt brugen af logit-modeller at bygge på teoretiske spidsfindigheder. Det væsentligste hævdes derimod at være, hvilke variable, der indgår i modellen, samt størrelsesorden og fortegn på modellens parametre. I indlægget argumenteres for, at det modsatte kan være tilfældet.

Efter i kapitel 2 at have repeteret opbygningen af den mest 'almindelige' formulering af logit-modellen, beskrives i kapitel 3 et 'eksperiment' ved trafikdagene, hvor publikum blev spurgt om deres transportmiddelvalg i tre situationer. Ud fra eksperimentets resultat påpeges nogle af svaghederne ved den traditionelle logit-model med en lineær nyttefunktion.

Derefter diskuteres i kapitel 4 forskellige alternative formuleringer af nyttefunktionen. Det vises, at udformningen heraf er ensbetydende med, at modelbyggeren *før* modellen estimeres og kalibreres bevist eller ubevidst har forudsat, at trafikanterne har en bestemt adfærd. Der gives i kapitlet en række forslag til alternative formuleringer af nyttefunktionen, der begrundes ud fra seneste internationale resultater i den mikroøkonomiske og adfærdsmæssige forskning.

I kapitel 5 diskuteres, hvorvidt nyttefunktionen bør danne grundlag for en logit-model eller en probit-model. Logitmodellen kan være problematisk i situationer, hvor nogle af alternativerne ikke er indbyrdes uafhængige (f.eks. tog og bus). Endelig giver kapitel 6 en mere bred diskussion af modeller for transportmiddelvalg.

Indlæggets konklusioner er parallelle til nogle af konklusionerne vedrørende rutevalgsmodeller i et andet indlæg af forfatteren ved dette års trafikdage (Nielsen, 1996/1), ligesom det fortsætter den diskussion om trafikmodeller, der blev startet ved et noget bredere indlæg ved sidste års trafikdage (Nielsen, 1995).

## 2 NYTTE-BEGREBET OG DETS BRUG TIL TRAFIKMODELLER

Nyttebegrebet og nyttefunktioner er den mest benyttede teori til udledning af matematiske modeller for transportmiddelvalg. Dette skyldes blandt andet, at nytteteoretiske modeller kan begrundes ud fra både mikroøkonomiske og mere adfærdsmæssige overvejelser. Derudover har modellerne vist sig brugbare i praktiske modelarbejder (gode statistiske overensstemmelser

med nutidssituationen<sup>1)</sup>). Endelig har modellerne (i hvert fald den 'traditionelle' logitmodel) også analogier til de fysiske love (f.eks. entropimaksimering, Wilson, 1970).

I dette kapitel repeteres nyttebegrebet kort, mens de følgende kapitler viser, at den resulterende model (herunder i særlig grad nyttefunktionen) er ganske følsom over for de tilgrundliggende antagelser og forudsætninger ved udledningen af modellen.

## 2.1 Om valgmodeller

Modeller, hvori der er indbygget korrektionsfaktorer for det enkelte transportmiddel, eller hvori der indgår parametre, der estimeres eksplicit for det enkelte transportmiddel, kritiseres ofte for manglende generalitet. For at undgå dette kan følgende betingelser opstilles:

- 1) Såfremt rejsemodstandene for to transportmidler er ens, vælges de af lige mange trafikanter.
- 2) Hvis en given brøkdel af trafikanter vælger ét transportmiddel frem for et andet, er denne brøkdel konstant, også hvis der introduceres nye transportmidler.

Mange modeller for transportmiddelvalg (herunder den almindelige formulering af logitmodellen) overholder disse betingelser, der imidlertid rummer en række problemer:

Den første betingelse kan kun gælde, hvis svært kvantificerbare faktorer vedrørende komfort, regularitet, image, fleksibilitet, m.v. indgår eksplicit i udtrykket for rejsemodstande (se afsnit 4.3). Derudover kan den også antastes ud fra den mikroøkonomiske teori, som det vises i afsnit 4.2.

Den anden betingelse har i højere grad været til debat i litteraturen. Betingelsen betegnes ofte som aksiomet om uafhængighed af irrelevante alternativer (*Independence of Irrelevant Alternatives, IIA*)<sup>2)</sup>. Såfremt alternativerne virkelig er uafhængige, er denne betragtning naturligvis korrekt; Indførslen af et nyt transportmiddel får jo ikke et af de tidligere transportmidler til at være bedre eller dårligere i forhold de andre. Imidlertid er transportmidler sjældent hverken uafhængige eller helt afhængige. Kunne der tidligere kun vælges mellem bil og bus, vil en ny bybane næppe vælges lige hyppigt uafhængig af om man tidligere benyttede bil eller bus. Problemer med den anden betingelse diskuteres nærmere i kapitel 5.

## 2.2 'Nytteteoretiske' modeller

En række valgmodeller kan udledes ud fra en forudsætning om, at et givet alternativ,  $k$ , er karakteriseret ved en deterministisk komponent  $u_k$ , der er en målelig størrelse, og en stokastisk komponent  $\varepsilon_{(u)k}$ .  $u_k$  antages at beskrive *nyttens* (engelsk *utility*) af det pågældende alternativ, hvorfor modeller, der bygger på en sådan antagelse, siges at bygge på *nytteteoretiske forudsætninger* (Andersen, 1980, s.205).  $\varepsilon_{(u)k}$  antages at beskrive forhold, der ikke direkte kan

---

1) Dette er dog kun en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for en god model, jvf. Nielsen (1994, 1995 og 1996/1).

2) Jvf. Luce, 1959. Også Luce & Suppes (1965), Kanafani (1983, s.133), Ben-Akiva & Lerman (1985, s.108-111) samt Ortúzar & Willumsen (1990, s.185) beskriver dette aksiom.

kvantificeres, samt variationer i adfærd for forskellige personer. Den samlede nytte  $U_k$  er summen af den deterministiske og stokastiske komponent, dvs:

$$U_k = u_k + \epsilon_{(u)k} . \quad (1)$$

Da  $U_k$  rummer en stokastisk komponent, kaldes modeller, der bygger på denne teori, også *stokastisk nytteteori* (*random utility theory*, jvf. f.eks. Bovy & Stern, 1990, s.179-200).

I trafikmodeller består den rationelle komponent i nyttefunktionen  $u_k$  ofte kun af en funktion af en række kvantificerbare rejsemønstre  $c_k$  (eller generaliserede omkostninger) som rejsetid og rejseomkostning. Derfor benyttes tit notationen  $C_k$  i stedet for  $U_k$  (hvor  $C_k = -U_k$ ) for at understrege, at der er tale om en simplificeret nyttefunktion:

$$C_k = c_k + \epsilon_k . \quad (2)$$

### 2.3 Udledning af den binære logitmodel

Hvis der betragtes en valgsituation med kun to valgmuligheder, og det antages, at en trafikant vil vælge det alternativ, der har den mindste rejsemønstre, vil alternativ 1 vælges, hvis dets rejsemønstre er mindst:

$$\begin{aligned} C_1 < C_2 &\Leftrightarrow \\ c_1 + \epsilon_1 < c_2 + \epsilon_2 &\Leftrightarrow \\ c_1 - c_2 < (\epsilon_2 - \epsilon_1 = \epsilon) &. \end{aligned} \quad (3)$$

Selv om  $c_1$  er mindre end  $c_2$ , er det ikke sikkert at alternativ 1 vælges, da højre side i den sidste ulighed er en stokastisk variabel. Valgsituationen givet ved formel 3 kan mere generelt formuleres som:

$$\begin{aligned} P(k) &= P(C_k < C_m) \quad , \quad m \neq k \Leftrightarrow \\ P(k) &= P(c_k - c_m < \epsilon_{km}) \quad , \quad m \neq k . \end{aligned} \quad (4)$$

hvor  $P(k)$  er sandsynligheden for at vælge alternativ  $k$  og  $\epsilon_{km}$  er 'stokastiske variationer' ved sammenligning af transportmiddel  $k$  og  $m$ .

Ud fra formel 4 kan forskellige modeltyper udledes afhængigt af, hvilken sandsynlighedsfordeling  $\epsilon_{km}$  antages at følge. Det bemærkes, at ovennævnte formel kan benyttes ved valg mellem flere transportmidler, idet der da opstilles et ligningssystem af typen 4, hvor hver ligning repræsenterer et par af de konkurrerende transportmidler.

Hvis  $\epsilon_{km}$ 'erne i formel 4 antages at følge en *Gumbelfordeling*<sup>1)</sup> kan der udledes en model, *logitmodellen*, der er let at behandle matematisk (Kanafani, 1983, s.129 og Sheffi, 1985,

---

1) Også kaldet  $MAX_1$ -fordelingen. Grafen herfor minder en del om Normalfordelingen (jvf. Nielsen, 1994, app. 1.2.4). Ofte (f.eks. i Ortúzar & Willumsen, 1990, s.184 og Andersen, 1980, s.206) siges logitmodellerne at være udledt ud fra Weibullfordelingen (der er et særtilfælde af  $MAX_3$ -fordelingen, jvf. Conradsen, 1984, s.1.97). Ved en transformation af modellens parametre, vil dette også kunne gøres, mens dette ikke er nødvendigt ud fra Gumbel-fordelingen.

s.265). Logitmodellen i sin simpleste form udledes under en forudsætning om, at de enkelte alternativer er uafhængige<sup>1)</sup> (Ibid, samt McFadden, 1974):

$$P(k) = \frac{e^{-\beta \cdot c_k}}{\sum_m e^{-\beta \cdot c_m}}, \quad (5)$$

hvor  $P(k)$  er sandsynligheden for at vælge et givent alternativ  $k$ , hvor  $m$  beskriver alle alternativer.  $c_k$  er rejsemodstanden for det givne alternativ og  $\beta$  er en modelparameter.

## 2.4 Generaliseret nyttefunktion

Ofte beregnes rejsemodstanden efter lineære udtryk af typen:

$$-u_k = c_k = \beta_1 \cdot c_{k1} + \beta_2 \cdot c_{k2} + \dots + \beta_{(n-1)} \cdot c_{k(n-1)} + \beta_{nk}, \quad (6)$$

hvor  $c_{k1} \dots c_{k(n-1)}$  repræsenterer forskellige rejsemodstande for transportmiddel  $k$ ,  $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$  generelle parametre og  $\beta_{nk}$  transportmiddelspecifikke parametre.

Grunden til den hyppige anvendelse af lineære nyttefunktioner er, at de er lette at estimere matematisk og at det er let at udregne egenelasticiteter og krydselasticiteter<sup>2)</sup>, samt at de er implementeret i de gængse trafikmodelpakker.

Hvis det ønskes, at logit-modellen også kan tage hensyn socioøkonomiske variable, benyttes i stedet for  $c_k$  som nævnt den mere generelle  $u_k$ . Nyttefunktionen kan da rent heuristisk formuleres som:

$$u_k = \sum_s (\alpha_s \cdot S_{sk}) - \sum_c (\beta_c \cdot c_{ck}) \quad (7)$$

hvor  $S_{sk}$  er den  $s$ 'ne socioøkonomiske variabel med relevans for transportmiddel  $k$  og  $c_{ck}$  er den  $c$ 'ne rejsemodstand for transportmiddel  $k$ .  $\alpha$ 'erne og  $\beta$ 'erne er parametre.

Fordelen ved at inddrage socioøkonomiske variable i valgfunktionen er helt åbenlyst, at disse også har stor betydning for transportmiddelvalg (f.eks. indkomst og biltæthed, jvf. bl.a. Larsen, 1996). Ligeledes har det betydning, hvilke valgmuligheder trafikanterne har, herunder om den enkelte tur er tvungen, valgt eller bunden (Nielsen, 1994, s.5.31). Dette afhænger også af socioøkonomiske variable samt variable som parkeringsafgifter og parkeringsrestriktioner.

---

1) Svarende til betingelserne i afsnit 2.1.

2) Nielsen (1994, afsnit 5.3.5.1), Andersen (1980, s.217), Kanafani (1985, s.134) og Ortúzar & Willumsen (1990, s.186). Se Ben-Akiva & Lerman (1985) for en grundigere gennemgang.

## 2.5 Valg af model for to transportmidler

Hvis der kun er to alternativer (kaldet den *binære logitmodel*) findes sandsynligheden for valg af alternativ 1 til (jvf. formel 5):

$$P(1) = \frac{e^{-\beta \cdot c_1}}{e^{-\beta \cdot c_1} + e^{-\beta \cdot c_2}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \cdot (c_2 - c_1)}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \cdot \Delta c}}, \quad (8)$$

hvor  $\Delta c$  er forskellen i rejsemodstanden for de to transportmidler.

Med andre ord er valget mellem de to transportmidler ifølge modellen uafhængigt af den samlede rejsetid, men kun afhængigt af forskellen mellem de to transportmidlers rejsetid. Generelt er den binære logitmodel i øvrigt karakteriseret ved følgende:

- Modellen genererer en S-formet kurve, der har vist sig at svare til de empirisk bestemte fordelingskurver for en *bestemt turlængde*, f.eks. kurver for valg af transportmiddel.
- Hvis  $c_1 = c_2$ , så er  $P(1) = P(2) = 0,5$ .
- Hvis  $c_1 \gg c_2$ , så går  $P(1)$  mod 0.

## 3 SIMPELT VALG MELLEM BUS OG CYKEL

Ved fremlæggelsen på trafikdagene samt i en tidligere forelæsning for planlæggerstuderende ved AUC blev der foretaget et simpelt eksperiment med to alternativer (cykel og bus) givet ved én variabel (rejsetiden). I eksperimentet blev der spurgt om transportmiddelvalget for tre ture, jvf. tabel 1<sup>1)</sup>. Idet rejsemodstanden (rejsetiden) stadig antages at være en lineær funktion af transportegenskaber, er rejsemodstandsfunktionen:

Tur	Tid, bus (min)	Tid, cykel (min)	Valg af cykel	
			Planlæggerstuderende	Konferencedeltagere
AUC - Aalborg	20	20	48%	70%
Aalborg - Kryle Klit	100	100	8%	10%
Kryle Klit - Hirtshals	200	200	1,5%	5%

**Tabel 1** Valg mellem cykel og bus for tre ture.

$$c_k = \beta_1 \cdot t_k + \beta_{k2} \quad (9)$$

hvor  $t_k$  er rejsetiden med transportmiddel  $k$ .

Den binære logitmodel er da (idet  $\beta_{12}$  og  $\beta_{22}$  slås sammen til én konstant,  $\beta_2$ ):

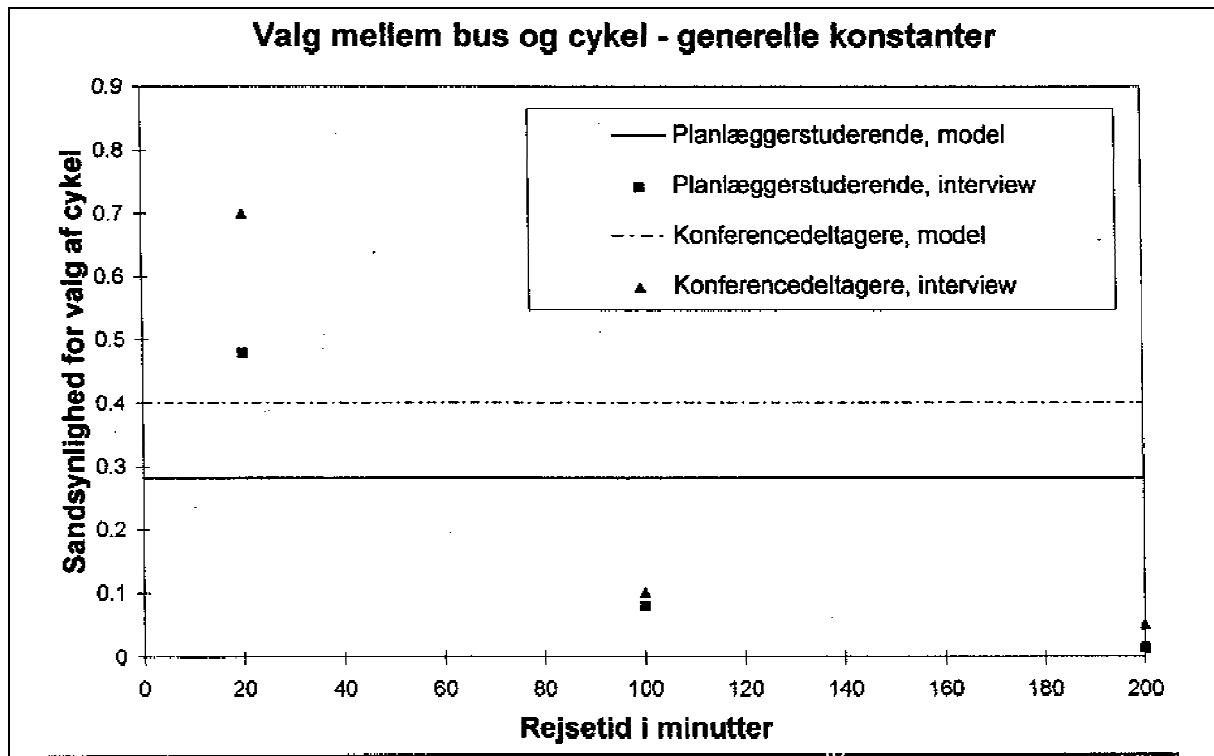
$$P(1) = \frac{1}{1 + e^{c_2 - c_1}} = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 \cdot t_2 + \beta_2 - \beta_1 \cdot t_1 - \beta_{12}}} = \frac{1}{1 + e^{\beta_1(t_2 - t_1) + \beta_2}} \quad (10)$$

1) De planlæggerstuderende blev spurgt om vinteren i dårligt vejr, konferencedeltagerne i August med godt vejr. Dette forklarer måske konferencedeltageres højere præference for cykel.

Da rejsetiden for hver tur er ens for de to transportmidler er  $t_1 - t_2 = 0$ , og formel 10 simplificeres til:

$$P(1) = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 \cdot 0 + \beta_2}} = \textit{konstant} \quad (11)$$

Figur 1 viser klart en dårlig overensstemmelse mellem observationer og de estimerede valgmodeller for de to grupper af observationer.



Figur 1 Sammenligning mellem observationer og modelforudsigelser for hhv. planlæggerstuderende og konferencedeltagere - 'sædvanlig' nyttefunktion.

#### 4 DISKUSSION AF NYTTEFUNKTIONEN

I dette kapitel fortsættes diskussionen om nyttefunktioner, og der gives bud på justeringer, der kan imødegå de problemer, som viste sig ved eksperimentet. Der tages udgangspunkt i forskellige adfærdsmæssige teorier.

##### 4.1 Mikroøkonomisk udledning af den 'traditionelle' nyttefunktion

Ifølge den traditionelle mikroøkonomiske beskrivelse af forbrugeres adfærd, vælges forbrugsgoder med henblik på at maksimere den personlige tilfredsstillelse eller nytte under opfyldelse af individets økonomiske begrænsninger (Lancaster, 1966). Overføres denne tilgang til valg mellem transportmidler er nyttefunktionen lineær i rejseomkostninger (McFadden, 1981 som fortolket i Jara-Díaz, 1996). Dette synes at retfærdiggøre formuleringen af

nyttefunktionen med lineære rejsemønstre, som i formel 6. I McFaddens model har tiden dog ikke betydning for valg af transportmiddel.

McFaddens forudsætninger samt lignende betingelser og nytteudtryk leder således frem til det, der i den sædvanlige nytteteori (eller blandt trafikplanlæggere) kaldes nyttefunktionen. Jævnfør den mikroøkonomiske teori er denne funktion en *betinget indirekte nyttefunktion* (på engelsk conditional indirect utility function), idet den er *udledt* ud fra *betingelser* om nyttemaksimering af forbrug under økonomiske *begrænsninger* for individerne (Jara-Díaz, 1996).

Jara-Díaz & Videla (1989) løser forudsætningen om sammenhæng mellem transportmiddelvalg og forbrug i McFaddens model, hvorved der udledes en model, hvor rejseomkostningerne (stadig uden tiden) ud over lineært også kan indgå i *kvadrated*, samt hvor *indkomsten* indgår eksplicit modellen (jo større indkomst des mindre betydning har rejseomkostningen for transportmiddelvalg). Jara-Díaz (1996) refererer til empiriske undersøgelser, der underbygger dette.

#### 4.2 Videreudvikling af den mikroøkonomiske teori - Afvejning mellem tid og forbrugsgoder

Ret tidligt udviklede den mikroøkonomiske teori sig til at tage hensyn til, at tiden og aktivitetsmønstret har betydning for rejsemønstret ligesåvel som den rent økonomiske afvejning<sup>1)</sup>. Ofte antages det, at rejsemønstre (tid og omkostninger) er variable, der har indflydelse på nytte gennem deres betydning for købekraft,  $G$  (Goods), såvel som fritid,  $L$  (Leisure) (jvf. Jara-Díaz, 1996). Således antages der at ske en afvejning mellem forbrugsgoder, fritid og indkomst (Train & McFadden, 1978), som for ét OD-par kan formuleres som (frit efter Jara-Díaz, 1996):

$$\begin{aligned} & \text{Max}U(G,L) \quad , \\ \text{u.b.} \quad & G + o_k = w \cdot W + E \\ & L + W + t_k = t_{\text{tot}} \end{aligned} \tag{12}$$

hvor  $o_k$  er rejseomkostningen for transportmiddel  $k$ ,  $w$  er timelønnen,  $W$  er arbejdstiden,  $E$  er fast indkomst fra andre kilder,  $t_k$  er rejsetiden og  $t_{\text{tot}}$  er den totale tilgængelige tid.

---

1) Jara-Díaz (1996); i 1970 benyttede Gronau Beckers (1965) teori til at modellere transportmiddelvalg med både tidsmæssige og økonomiske restriktioner (se Gronau, 1986). Jara-Díaz (1994) og Kraan (1994/1) giver en grundigere historisk gennemgang og diskussion af metodeudviklingen på dette felt, mens Kraan (1994/2) og Jara-Díaz (1996) bygger videre på hver af de to tidligere artikler.

Arbejdes der mere, kan der forbruges mere - men med mindre fritid som resultat. På grundlag af formel 12 kan der udledes en nyttefunktion, der er lineær i tid og omkostning (som i McFaddens 1981 model), men hvor timelønnen også indgår (og derved indirekte indkomsten)<sup>1)</sup>:

$$U_k = -K' \cdot w^{1-\beta} \cdot t_k - K' \cdot w^{-\beta} \cdot o_k \quad (13)$$

hvor  $\alpha$  er en parameter og  $K$  en konstant.

Hvis  $\beta \rightarrow 0$ , bliver valget besluttet ved minimering af  $o_k + w t_k$  (jo større indkomst des større vægt på minimering af rejsetid). Hvis  $\beta \rightarrow 1$ , bliver valget besluttet ved minimering af rejsemodstanden  $o_k/w + t_k$  (jo større indkomst jo mindre betydning af rejseomkostningen). Sidstnævnte svarer til omkostning/indkomst-specifikationen, der ofte benyttes i nyttefunktioner. Hvis indkomsten er korreleret med andre variable, begrundes dette lidt frit fortolket brugen af socioøkonomiske variable i nyttefunktionen (men ikke på samme måde som i afsnit 2.4). I Norden underbygger Kurri & Pursula (1994) indkomstafhængigheden, mens Algers, m.fl. (1995) giver et mere broget resultat.

Train & McFaddens tilgang rummer en ret stærk forudsætning, nemlig at individet frit kan vælge mellem arbejdstid og fritid efter en fast timeløn. Således tages der ikke hensyn til, at mange personer har en fast indkomst (hvor ændret rejsetid ikke påvirker indkomsten, men kun mængden af fritid), og at nogen arbejder mere uden at få ekstra løn for det (f.eks. en entusiastisk forsker)<sup>2)</sup>. For at tage højde herfor opstillede Jara-Díaz i 1990 nogle mere generelle betingelser<sup>3)</sup>, der resulterer i en mere generel nyttefunktion (se Jara-Díaz, 1996 for en introduktion hertil). Essensen i denne funktion er (her noget simplificeret):

- 1) At rejseomkostningen,  $o$  (der jo ofte er korreleret med længden), bør vægtes relativt til indkomsten,  $I$ ; altså  $o/I$ .
- 2) At tiden,  $t$ , bør indgå lineært i nyttefunktionen, samt
- 3) At begge variable også kan indgå som kvadratled i forhold til indkomsten (altså  $O^2/I^2$  og  $t^2/I$ ) og evt. som produkter (nok lidt specielt).

Ovennævnte er ofte observeret rent empirisk, f.eks. at det er nødvendigt at stratificere modellerne i forhold til turlængder eller absolutte rejsetider (bytrafik, regional trafik, fjerntrafik), eller at opstille separate modeller herfor (en konsekvens af bl.a. det manglende

---

1) Jvf. Jara-Díaz (1996). Bemærk at der i Ibid er en trykfejl med manglende minus på første led.

2) Ligeledes tages ikke hensyn til, at forbrug kan medføre mere fritid ud over at kræve mere arbejde til finansiering af forbruget, f.eks. brug af håndværkere versus gør-det-selv, køb af opvaskemaskine, etc. (overarbejde finansierer frikøb fra hjemlige forpligtelser).

3) Train & McFaddens model kan i øvrigt vises at være et særtilfælde af Jara-Díaz' model.



kvadratledet på omkostningen)<sup>1)</sup>. Ligeledes er det ofte nødvendigt at stratificere i indkomstgrupper eller efter turformål, som for individet til en hvis grad afhænger af indkomsten (en konsekvens af manglende led af typen  $O/I$ ,  $O^2/I^2$  eller  $t^2/I$ ).

Tiden og aktivitetsmønstrets rolle for rejseadfærden har ledt til en øget fokus herpå i de mikroøkonomiske metoder. Blandt andet Kraan (1994/1 & /2) og Jara-Díaz (1994 og 1996) behandler dette nærmere.

### 4.3 Transportmiddelspecifikke parametre

Man kan diskutere, hvorvidt parametrene i nyttefunktionen ikke bør være transportmiddel-specifikke. Dette kan heuristisk begrundes på flere måder: Adfærdsmæssigt kan trafikanterne måske antages at have forskellige oplevede rejsemønstre med forskellige transportmidler, hvilket begrunder en systematisk forskel fra de målbare rejsemønstre, mikroøkonomisk kan det måske antages, at tiden kan benyttes konstruktivt i visse transportmidler<sup>2)</sup> (f.eks. retning af studerendes opgaver i tog). Statistisk kan man antage, at de målbare rejsemønstre for nogen af transportmidlerne kan være proxy-variable for 'ikke-rationelle' faktorer som komfort, besvær, etc. (som ofte vil være proportionalt med rejsetid, længde, etc.). Og psykologisk kan man måske endda hævde, at det at rejse ikke kun er en rejsemønstre (negativ nytte) men en aktivitet, der til en vis grad er et gode i sig selv (cykle til arbejde for at få motion, lufte sin Harley Davidson eller Porsche for status og fornøjelse, benytte kollektiv trafik som følge af sin politiske observans, etc.).

Antages rejsemønstret stadig at være en lineær funktion af transportegenskaber, kan nyttefunktionen fra kapitel 3's eksperiment da udbygges til ( $\beta_{1k}$  er nu specifik for hvert transportmiddel,  $k$ ):

$$c_k = \beta_{1k} \cdot t_k + \beta_{2k} \quad (14)$$

Den binære logitmodel bliver da:

$$P(1) = \frac{1}{1 + e^{c_2 - c_1}} = \frac{1}{1 + e^{\beta_{12} \cdot t_2 + \beta_{22} - \beta_{11} \cdot t_1 - \beta_{21}}} \quad (15)$$

Som ved eksperimentets rejsetider ( $t_1=t_2=t$ ) reduceres til ( $\beta_1=\beta_{12}-\beta_{11}$  og  $\beta_2=\beta_{22}-\beta_{21}$ ):

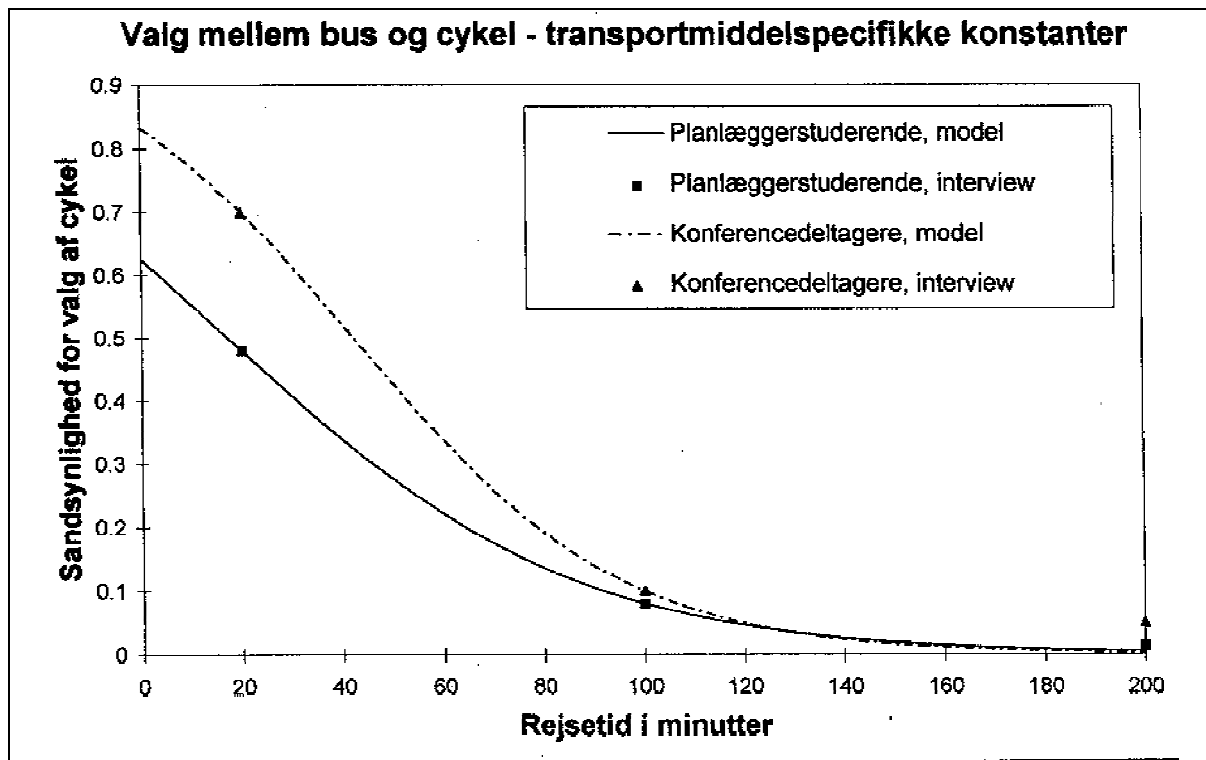
$$P(1) = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 \cdot t + \beta_2}} \quad (16)$$

Figur 2 viser, at denne model giver en markant bedre overensstemmelse med observationerne fra eksperimentet.

---

1) Kjørstad & Renolen (1996) bekræfter, at vægtingen af rejsetiden (per minut) stiger med stigende rejse længde. Algers, m.fl. (1995) samt referencer i Jara-Díaz (1996) viser samme tendens.

2) Dette forklarer for kollektive rejser også delvist de forskellige vægtinger af vente-tid, rejsetid, skjult rejsetid, etc.



*Figur 2 Sammenligning mellem observationer og modelforudsigelser for hhv. planlæggerstuderende og konferencedeltagere - transportmiddelspecifikke parametre.*

#### 4.4 Individafhængige vægtninger (præferencer) af parametrene

Ovenfor blev det antaget, at det enkelte individ vægter de enkelte rejsemønstre ens inden for nyttefunktionen  $u_k$  (eller  $c_k$ ). Dog kunne nyttefunktionen udvides til, at individernes præferencer vægtes forskelligt med indkomstgrupper. Imidlertid kunne man meget vel forestille sig, at individerne selv inden for en indkomstgruppe kan have forskellige vægtninger af rejsemønstre og transportmidler; nogle evner måske at læse i en bus - andre bliver køresyge, nogle kører hurtigere i bil eller cykler hurtigere end andre, der er forskelle på prioriteringer af fritid versus forbrugsgoder, nogle fejlvurdere måske de enkelte rejsemønstre, etc.

I praktiske modelarbejder løses problemet med forskellige præferencer ofte ved at opdele trafikanterne i en række homogene grupper efter turformål, biladgang, familietype etc.<sup>1)</sup>. En anden tilgang er at lade vægtene følge en fordeling. Dette er gennemført med succes i Nielsen (1996/1 & /2), der også viste at forskelle i præferencer er en betydelig del af rutevalg. Man kan nemt forestille sig analogier fra resultaterne vedrørende rutevalg i Ibid med transportmiddelvalg. Enkelte udenlandske modelarbejder og teoretiske overvejelser peger også herpå (bl.a. Hensher m.fl., 1996).

1) COWIconsult (1995) opdeler eksempelvis efter såkaldte 'bilelskere' eller ej, ligesom der kan drages paralleller til en række indlæg ved dette og sidste års trafikdage (Jensen, 1996, Berge, 1996 og Vilhelmson, 1996). Nielsen (1994, afsnit 5.2.3.1) gennemgår skelnen mellem tvungne, valgte og bundne ture.

## 4.5 Oplevede rejsemodstande

Man kan ud fra rent adfærdsmæssige overvejelse diskutere, hvorvidt trafikanterne oplever de enkelte rejsemodstande uden en systematisk afvigelse (antagelsen om fordelingen af oplevede rejsemodstande og fordelingen af trafikanters vægtning af de enkelte rejsemodstande).

F.eks. vil trafikanter måske også opfatte forskelle i rejsemodstande relativt. Tabel 2 viser et eksempel på estimerede sandsynligheder for valg af transportmiddel ved brug af en binær logitmodel med én variabel i nyttefunktionen; rejsetiden. Som det ses af tabellen, er der ved brug af den lineære nyttefunktion samme sandsynlighed for valg af transportmiddel, hvad enten rejsetiderne for de to transportmidler

Transport-middel	$P(k)$ , lineær nyttefunktion	$P(k)$ , logaritmisk nyttefunktion,
Bil, 5 min.	98,2 %	98,2 %
Tog, 15 min.	1,8 %	1,8 %
Bil, 500 min.	98,2 %	51,8 %
Tog, 510 min.	1,8 %	48,2 %

**Tabel 2** Sandsynlighed for valg af transportmiddel ved lineær ( $\beta=0,4$ ) og logaritmisk ( $\beta=3,64$ ) nyttefunktion.

er hhv. 5 og 15 min. eller hhv. 500 og 510 min. Resultaterne ændres markant, hvis der i stedet benyttes en *logaritmisk* nyttefunktion ( $u_k = -\beta \ln(t)$ )<sup>1)</sup>.

Modsat kunne man også hævde, at trafikanterne vægter rejsemodstandene marginalt i forhold rejselængden eller rejsetiden; efter en lang inter-kontinental fly-rejse benyttes taxi fra lufthavnen, hvor man for samme rejse normalt ville tage bus og tog. Dette vil alt-andet-lige føre til, at den oplevede rejsemodstand vokser *konkavt* med den deterministiske, hvilket f.eks. kan modelleres ved et *kvadratled*.

Det tilsvarende argument benyttes til tider i den mikroøkonomiske teori; har man meget fritid betyder 10 minutters ekstra rejsetid ikke så meget (f.eks. for en pensionist), mens en børnefamilie med en travl hverdag måske i stedet vælger at benytte bil. Dette fører til et *kvadratled* i nyttefunktionen (Jara-Díaz, 1996).

## 4.6 Fysiologiske betragtninger

Endelig er der det problem, at opregningen af rejsemodstandene i trafikmodeller antages at være additive. Rent fysisk er dette imidlertid ikke tilfældet; Man kan f.eks. ikke cykle med samme gennemsnitshastighed over 10, 100 og 200 kilometer, man kan godt køre i bil en time uden stop, men ikke i 10 eller 20 timer, etc. Dette er ikke et problem i nyttefunktionerne (der jo antager at rejsemodstandene er korrekt bestemt), men mere et problem i trafikmodelkomplekset, hvor rutevalgsmodellerne i princippet burde kunne tage højde herfor. En justering der tager højde for dette vil typisk resultere i en *konkav* funktion i rejsemodstand, f.eks. et *kvadratled*.

---

1) I Ortúzar & Willumsen (1990, s.204-206) behandles formuleringen af nyttefunktionen mere systematisk og der gives referencer til metoder til at beregne elasticiteter og krydselasticiteter for logaritmiske nyttefunktioner samt nyttefunktioner, der både rummer logaritmiske og lineære led. Se også Ben-Akiva & Lerman (1985).

## 5 ANTAGELSER OM FORDELINGEN AF DEN STOKASTISKE KOMPONENT

På grund af uafhængighedsforudsætningen i logitmodellen, er kovariansmatricen herfor særlig simpel, idet kun diagonalen optræder. Formel 17 viser eksempelvis kovariansmatricen for valget mellem tre transportmidler (jvf. Ortúzar & Willumsen, s.186):

$$\overline{\sigma^2} = \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (17)$$

Dette er en af grundene til den lette matematiske behandling af logit-modellen. Imidlertid giver det problemer, hvis de forskellige alternativer er delvist afhængige, f.eks. bilejerskabets betydning for valg mellem bil, cykel og kollektiv trafik (afhængighed mellem cykel og kollektiv trafik) eller betydning af præferencer for individuel trafik for valg mellem bil, cykel, bus og tog (afhængighed mellem hhv. bil og cykel samt bus og tog). Problemet kan delvist løses ved brug af de hierarkiske eller nastede logit-modeller, men her skal træ-strukturen fastlægges a priori.

### 5.1 Udledning af probitmodellen

Hvis  $\varepsilon_{km}$ 'erne i formel 4 i stedet antages at følge en normalfordeling, kan den såkaldte probitmodel udledes (jvf. f.eks. Kanafani, 1983, s.124-128 og Sheffi, 1985, s.266-269).

#### Den binære probit-model

I den binære probitmodel for valg mellem to transportmidler er kovariansmatricen  $\overline{\sigma^2}$ :

$$\overline{\sigma^2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} , \quad \text{hvor} \quad (18)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 .$$

hvor  $\sigma_i^2$  er variansen, og  $\sigma_i$  er spredningen for transportmiddel  $i$ .  $\sigma_{12}$  er kovariansen mellem de to transportmidler, og  $\rho$  er korrelationskoefficienten mellem de to transportmidler.

Den binære probit-model kan da ved integration i den flerdimensionale normal-fordeling (MVN) formuleres som (se f.eks. Ortúzar & Willumsen, 1990, s.179):

$$P(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{c_2 - c_1 + x_1} \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \left( \frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{2 \cdot \rho \cdot x_1 \cdot x_2}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \left( \frac{x_2}{\sigma_2} \right)^2 \right)}}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot (1 - \rho^2)} dx_2 dx_1 , \quad (19)$$

hvor  $P(1)$  er sandsynligheden for valg af transportmiddel 1.

Ovenstående integral kan ikke løses analytisk. Idet  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$ , kan den binære probitmodel dog også formuleres som (Sheffi, 1985, s.267):

$$P(1) = \text{scalsym115} \Phi \left( \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\sigma^2}} \right), \quad (20)$$

hvor  $\Phi$  er fordelingsfunktionen for normalfordelingen.

$\Phi$  kan slås op i en tabel med standardnormalfordelinger eller der kan benyttes en statistisk softwarepakke, der er i stand til at beregne denne fordeling.

Sammenlignes den binære logitmodel (formel 8) med den binære probitmodel (formel 20) ses, at der i begge formler kun indgår én spredning, idet det for en binær valgmodel ikke giver mening at tale om korrelerede variable. Derfor er der i dette tilfælde ikke så stor forskel på de to modeltyper. Praktiske erfaringer med binære logit og probit modeller viser ifølge Kanafani (1983, s.130), Andersen (1980, s.204), at de to modeltyper når frem til stort set samme resultater.

### Multinomial probitmodel

Hvis flere transportmidler betragtes, er det nødvendigt at benytte en flerdimensional normalfordeling til at beskrive  $\varepsilon_{km}$ 'erne (på engelsk multivariate normal function eller MVN-function). En sådan kan kalibreres ud fra middelværdierne for rejsemønstrene for hvert enkelt transportmiddel (dvs.  $c_k$ 'erne), spredningerne for det enkelte transportmiddel og kovarianserne mellem transportmidlerne. I den flerdimensionale normalfordeling beskrives disse ved en kovariansmatrice,  $\overline{\sigma^2}$ , hvor diagonalelementerne repræsenterer varianserne for de enkelte rejsemønstre, mens de øvrige elementer repræsenterer kovarianserne parvist for alternativerne.

Ved mere end to transportmidler, er det vanskeligere at benytte probitmodellen (den multinomiale probitmodel, MNP), idet den da kun kan løses ved brug af avancerede iterative metoder eller Monte Carlo simulation. Sheffi (1985, s.268-269) refererer forskellige metoder hertil (se også Sheffi m.fl., 1982), mens Kanafani (1983, s.124-128) giver et eksempel på en tilnærmelsesmetode, der oprindeligt blev formuleret af Clark (1961). Siden har Lam & Mahmassani (1990) udviklet en simulerings- og estimations metode, der gør MNP anvendelig for helskala trafikmodelarbejder med mange alternativer. Metoden er bl.a. benyttet i Mahmassani (1996). Også Yai & Iwakura (1994) og Morikawa & Sasaki (1994) har operationaliseret den multinomiale probitmodel og har med fordel benyttet den til store modelarbejder.

Hvis antagelsen om uafhængighed, er opfyldt, giver de to modeller (logit- og probitmodellen) stort set samme resultater (Andersen, 1980, s.207 & Kanafani, 1983, s.131). Ofte holder denne antagelse imidlertid ikke i praksis, hvorved probitmodellen bør foretrækkes (Ortúzar & Willumsen, 1990, s.187 og Kanafani, 1983, s.130). Ofte modificeres logitmodellen på forskellige måder for at håndtere denne situation; f.eks. ved brug af de såkaldte hierarkiske logitmodeller. Kanafani (1983, s.133) giver dog en skarp kritik heraf:

*Modifications in the formulation of the logit model are possible in order to overcome this weakness. But, whenever there are similar alternatives so that the independence of irrelevant alternative is limiting, then the probit model, which does not have this property, should be used.*

Er der imidlertid empirisk grundlag til stede for at udelukke nogle af kovarianserne, har de hierarkiske logitmodeller den fordel, at de er lettere at behandle matematisk, og at der findes trafikmodelsoftware til brug heraf. Ligeledes kan det i visse tilfælde hævdes, at en hierarkisk model i højere grad afspejler trafikanternes valgmønstre (hvad der i probit-modellen ville give sig udtryk i at visse kovarianser ville være nul).

## **6 KRITIK AF NYTTEFUNKTIONER - NYE MODELTYPER**

En række forskere fra de humanistisk orienterede fag har kritiseret brugen af nyttefunktioner i trafikplanlægning. Mest kendt er Gärling (1994, s.118), der giver en skarp kritik af mikroøkonomiske modeller, idet han viser, at teorien bygger på en række mangelfulde antagelser i forhold til adfærdsforskningen og psykologisk forskning:

*In summary, microeconomic theory is both a false and incomplete description of how people make choices. Therefore, it is an inappropriate theoretical basis of travel-choice modelling. In particular the theory fails to account for (1) that choices are often part of plans; (2) that people show systematic biases in acquiring, representing, and using information on which choices are based; (3) that choices or preferences are inconsistent; (4) that the concept of utility refers to many different entities, not all of which are related to an egoistic motive; and (5) that choices are implemented through a process which sometimes entails developing habits.*

En række andre kilder diskuterer ligeledes opbygningen af modeller for bl.a. transport-middelvalg, f.eks. Bovy & Stern (1990), Stern (1996), Gärling, m.fl. (1996) og Svenson (1996).

Som modargument til kritikken af de mikroøkonomiske modeller kan det hævdes, at der kun i begrænset omfang er formuleret praktisk anvendelige alternative metoder. Modellerne kan være et kvantitativt værktøj til at overskue en kompliceret problemstilling, men de bør kun supplere og ikke erstatte kvalitative vurderinger. Modeldiskussionen i denne artikel kommer til en hvis grad kritikken til møde, f.eks. de præferencebaserede nyttefunktioner (f.eks. som beskrevet i Nielsen, 1996/1 & /2). Imidlertid er modellerne stadig stærkt simplificerede i forhold til adfærdsmæssige overvejelser.

En række nye modeltyper søger at tage hensyn til turkæder (f.eks. Mahmassani & Jou, 1996 og Fellendorf & Haupt, 1995). Den mikroøkonomiske teori udvikler sig mod at tage hensyn til tidsallokeringen over dagen og ugen (Kraan, 1994/1 & /2 og Jara-Díaz, 1994 & 1996). Aktivitetsbaserede modeller søger i højere grad at tage hensyn til det enkelte individs aktiviteter og beslutningsprocesser (Fellendorf & Haupt, 1995, Kitamura m.fl., 1995, Mahmassani & Jou, 1996, Kitamura & Fujii, 1996 og Golob, 1996), mens simuleringmodeller tager hensyn til trafikanters udvikling af vaner, manglende viden om nettet, samt de adfærdsmæssige betydninger af fluktuationer i trafikmønstret over dagen og fra dag til dag (f.eks. de Palma, m.fl. 1996 og Sorah, m.fl. 1994, se Nielsen, 1994, afsnit 7.6 for flere henvisninger).

En anden tilgang er, at betragte transportmiddelvalg og rutevalg under ét ved brug af de såkaldte 'supernetværk' (Sheffi & Daganzo, 1978 & 1980 samt Sheffi, 1985). Denne tilgang undersøges nærmere i IFP's GIS-T projekt.

En mere simpel fremgangsmåde har i praksis vist sig anvendelig til mere kortsigtede prognoser med moderate ændringer af de forklarende variable, nemlig rent statistisk at opbygge en model med passende elasticiteter og krydselasticiteter mellem de forskellige alternativer og forklarende variable. De fleste simultane modeller er af denne type (se Nielsen 1994 og 1995 for referencer). I Petersen (1996) beskrives anvendelsen af modeltypen i forbindelse med Hovedstadstrafikmodellens myldretidsmodel.

## 7 KONKLUSION

I artiklen er matematiske modeller for transportmiddelvalg diskuteret med særlig fokus på modeller, der bygger på nyttefunktioner. I kapitel 3 refereres til et begrænset eksperiment, der viste at den sædvanlige lineære nyttefunktion ikke er tilstrækkelig til at beskrive selv en meget simpel valgsituation. Formuleringen af nyttefunktionen søges derfor udvidet med forskellige led, der i kapitel 4 begrundes ud fra den 'traditionelle' mikroøkonomiske teori, mikroøkonomisk teori inkl. tidsrestriktioner, adfærdsmæssige antagelser, antagelser om forskelle mellem individers præferencer og adfærd, samt rent fysiologiske betragtninger. De væsentligste resultater herfra er (afsnitshenvisninger i parentes):

- At den lineære del af nyttefunktionen bør indeholde både en tidskomponent og en omkostningskomponent (afsnit 4.2).
- At de enkelte parametre i funktionen ofte bør være transportmiddelspecifikke (afsnit 4.3).
- At indkomsten (eller socioøkonomiske variable korreleret hermed) enten multipliceres tidskomponenten eller at omkostningen vægtes relativt til indkomsten (afsnit 4.2). Alternativt bør modellen stratificeres m.h.t. indkomst. Derimod synes der ingen umiddelbar teoretisk begrundelse for, at indkomsten (eller andre socioøkonomiske variable) skal indgå simpelt lineært i modellen.
- At både tid og omkostning endvidere kan indgå som kvadratled i nyttefunktionen. Ud fra den mikroøkonomiske teori vægtes de relativt til hhv. indkomsten og kvadratet herpå (afsnit 4.1 & 4.2). Kvadratledet kan også begrundes ud fra betragtninger om oplevelse af rejsemønstre (afsnit 4.5), der dog også kan begrunde en logaritmisk nyttefunktion. Endelig kan kvadratledet begrundes ud fra fysiologiske betragtninger (4.5). Alternativt til sådanne flerordensled kan modellen stratificeres over rejsemønstre.
- At vægtingen af de enkelte rejsemønstre i nyttefunktionen ofte bør følge en fordeling frem for at være deterministiske (afsnit 4.4).

Disse anbefalinger gælder den deterministiske del af nyttefunktionen. Kapitel 5 diskuterer fordelingen af den stokastiske del, og anbefaler brug af probitmodeller for valgsituationer med flere alternativer, der er mere eller mindre indbyrdes afhængige, f.eks. valg mellem bil, cykel, bus og tog.

## REFERENCER

- Andersen, Knud Erik. **Persontrafikmodeller** Rapport nr. 32, IVTB, 1980.
- Algers, S., Dillén, J.L. & Widlert, S. **The National Swedish Value of time study**. Trafikdage på AUC'95, s.663-676 (kopi af indlæg ved PTRC-95, Warwick, England).
- Becker, G. **A theory of the allocation of time**. The Economic Journal, No. 75, 1965: s.493-517.
- Ben-Akiva, M. & Lerman, S.R. **Discrete Choice Analysis - Theory and Application to Travel Demand**. The MIT Press, 1985.
- Berge, G. **Livsstil og transportmiddelvalg**. Trafikdage på AUC'96, s.15-26.
- Bovy, P.H.L. & Stern, E. **Route Choice: Wayfinding in Transport Networks**. Kluwer Academic Publishers, Studies in Operational Regional Science, Vol. 9, 1990.
- Clark, C.E. **The Greatest of a Finite Set of Random Variables**. Operations Research 9(2), s.145-162, 1961.
- Conradsen, Knut. **En introduktion til statistik**. IMSOR, DTH, 5. Udgave, 1984.
- COWIconsult, **Konkurrenceflader i persontransport - Udkast**. Juni, 1995
- De Palma, A., Marchal, F. & Nesterov, Y. **Metropolis: A modular system for dynamic traffic simulation**. Paper submitted at the 76th TRB annual meeting, 1997.
- Fellendorf, M. & Haupt, T. **VISEM: Traffic demand calculations based on activity chains - Modelling techniques and practical use within a transportation planning system**. 23th PTRC Summer Annual Meeting, Warwick, Proceedings Seminar E, 1995, s.165-176.
- Gärling, Tommy. **Behavioral assumptions overlooked in travel choice modelling**. June 1994, "Seventh International Conference on Travel Behaviour", 1994, s.115-126.
- Gärling, T., Gillholm, R. & Gärling, A. **Reintroducing Attitude Theory in Travel Behaviour Research: The Validity of an Interactive Interview Procedure to Predict Car Use**. Submitted for Transportation, 1996.
- Golob, T.F. **A Model of Household Demand for Activity Participation and Mobility**. Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996.
- Gronau, R. **Home production - a survey**. In Handbook of Labour Economics, Vol.1. I Ashenfelter & R.Layard, eds. Holland, 1986, s.273-304.
- Hensher, D. Louviere, T. & Swait, J. fra **Combining Data Sources**. Udleveret ved Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996
- Jara-Díaz, S.R. **A general micro-model of users' behaviour: The basic issues**. June 1994, "Seventh International Conference on Travel Behaviour", 1994, s.91-103.
- Jara-Díaz, S.R. **Time and Income in Travel Demand - Towards a microeconomic activity framework**. Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996.
- Jara-Díaz, S.R. & Videla, J. **Detection of income effect in mode choice: theory and application**. Transportation Research 23B, 1989, s.393-400.
- Jensen, Mette. **Modsætning og afhængighed - om transport og særligt bilisme i det moderne samfund**. Trafikdage på AUC'96; publiceres i supplementsbindet.
- Kanafani, Adib. **Transportation demand analysis**. University of California, Berkeley. McGraw-Hill Book Company, 1983.
- Kitamura, R. & Fujii, S. **Two Computational Process Models of Activity-Travel Behaviour**. Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996.
- Kitamura, R. Pendyalam R.M., Pas, E.I. & Reddy, P.D.V.G. **Applications of AMOS, An Activity-based TCM evaluation tool to the Washington, D.C., metropolitan area**. 23th PTRC Summer Annual Meeting, Warwick, Proceedings Seminar E, 1995, s.177-1190.
- Kraan, M & van Maarseveen, M. **Time and money budgets in transportation modelling: Empiricism and theory**. June 1994, "Seventh International Conference on Travel Behaviour", 1994, s.104-114.
- Kraan, M. **Time allocation in transportation modelling with respect to limited time and money budgets: a new modelling technique**. 22th PTRC Summer Annual Meeting: 1994.
- Kurri, J. & Pursula, M. **Finnish Preliminary value of time studies**. Seventh International Conference on Travel behaviour, Chile, Preprints, 13-16 June, 1994: s.891-902.



- Kjørstad, K.N. & Renolen, H. **Bedre kollektivtransport - Trafikanter verdsetting av ulike kollektivtiltak.** Trafikdage på AUC'96, s.611-620.
- Lam, S.H. & Mahmassani, H.S. **Multinomial Probit Model Estimation: Computational Procedures and Applications.** Methods for understanding Travel Behaviour in the 1990's. IATB, s.229-242.
- Lancaster, K. **A new approach to consumer theory.** Journal of Political Economy, 74, 1966, a.132-157.
- Larsen, T. **Den landsdækkende rejsevaneundersøgelse (TU).** Trafikdage på AUC'96, s.545-553.
- Luce, R. **Individual Choice Behaviour: A theoretical Analysis.** Wiley, New York. 1959.
- Luce, R.D. & Suppes, P. **Preference, utility and subjective probability.** I R.Luce, R.Bush & E.Galanter (eds), Handbook of Mathematical Psychology. Wiley, New York. 1965.
- Mahmassani, H.S. & Jou, R-C. **Bounded Rationality in Commuter Decision Dynamics: Incorporating Trip Chaining in Departure Time and Route Switching Decisions.** Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996.
- McFadden, D. **Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behaviour.** Frontiers in Econometrics, Academic Press, New York. 1974.
- McFadden, D. **Econometric models of probabilistic choice.** In Structural Analysis of Discrete data with Econometric Applications, C.Manski & D.McFadden, eds. MIT Press, Cambridge, MA. 1981.
- Morikawa, T. & Sasaki, K. **Discrete choice models with latent variables using subjective data.** June 1994, "Seventh International Conference on Travel Behaviour", 1994, s.531-542.
- Nielsen, O.A. **Optimal brug af persontrafikmodeller - En analyse af persontrafikmodeller med henblik på dataøkonomi og validitet.** Ph.D.-Afhandling. Rapport No. 76, IVTB, DTU. 1994, 2.
- Nielsen, Otto Anker. **En diskussion af dagens brug af trafikmodeller - teori og empiri.** Trafikdage på AUC '95. Bind 2, 1995, s.633-652.
- Nielsen, Otto Anker. **Nye modeller for transportmiddelvalg.** Trafikdage på AUC'96, s.111-124.
- Nielsen, Otto Anker. **Do Stochastic Traffic Assignment Models Consider Differences in Road Users Utility Functions?.** Paper to be presented at 24th European Transport Forum" (PTRC annual Meeting), London, UK. Seminar M. 1996.
- Ortúzar, J.de D. & Willumsen, L.G. **Modelling Transport.** John Wiley & Sons, 1990.
- Petersen, M.A. **Simultan myldretids-trafikmodel for Hovedstadsområdet.** Trafikdage på AUC'96, s.105-110.
- Sheffi, Yosef. **Urban Transportation Networks.** Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- Sheffi, Y. & Daganzo, C.F. **Hypernetworks and Supply Demand Equilibrium with Disaggregate Demand Models.** TRB Transportation Research Record 673, 1978, s.113-121.
- Sheffi, Y. & Daganzo, C.F. **Computation of Equilibrium over Transportation Networks: The Case of Disaggregate Demand Models.** Transportation Science 14(2), 1980: s.155-173.
- Sheffi, Y., Hall, R. & Daganzo, C.F. **On the estimation of the multinomial probit model.** Transportation Research, 16A(5/6), s.447-56, 1982.
- Sorah, H., Timms, P. & Watling, D. **Modelling the day-to-day dynamics of route choice and traffic control.** Seventh International Conference on Travel behaviour, Chile, Preprints, 13-16 June, 1994: s.236-247.
- Stern, E. **Choice Behaviour in Congested Situations: Modelling and Research Needs.** Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996.
- Svenson, O. **On the Modelling of Human Choices in Descriptive Behavioral Decision Theory.** Conference on Theoretical Foundations of Travel Choice Modelling, Stockholm, August, 1996.
- Train, K. & McFadden, D. **The goods/leisure trade-off and disaggregate work trip mode choice models.** Transportation Research 12, 1978: s.349-353.
- Widlert, S. **Stated Preference Studies - The Design Affects The Results.** June 1994, "Seventh International Conference on Travel Behaviour", 1994: 13 s.(udleveret på konferencen).
- Vilhelmson, B. **Mobilitetens betydelse för olika aktivitetsmönster.** Trafikdage på AUC'96. s.521-530.
- Wilson, A.G. **Entropy in urban and regional modelling.** Pion Limited, 1970.
- Yai, T. & Iwakura, S. **Route Choice Modelling and Investment Effects in Metropolitan Rail Network.** Seventh International Conference on Travel behaviour, Chile, Preprints, 13-16 June, 1994: s.363-389.