

EN MODEL FOR PASSAGERERS RUTEVALG UNDER HENSYNTAGEN TIL KAPACITETS OG REGULARITETSPROBLEMER

Otto Anker Nielsen.

Banestyrelsen Rådgivning samt
Center for Trafik og Transportforskning (CTT), DTU

Goran Jovicic og Jens Møller-Pedersen

TetraPlan A/S

1. INDLEDNING / RESUME

I 1997 gennemgik Camilla Riff Brems ved Trafikdagene resultater fra rutevalgmodeller i en række ofte brugte softwarepakker, herunder TRIPS og EMME/2. Konklusionen af denne gennemgang var dels, at modellerne gav foruroligende forskellige resultater, dels at resultaterne skyldte adfærdsmæssige antagelser, der implicit er indbygget i algoritmerne¹. Nielsen (1998c) præsenterede en model, der i langt højere grad kunne estimeres ud fra rejsevaneundersøgelser, og dermed imødegå ovennævnte problemer. Imidlertid var der på daværende tidspunkt ikke empiriske undersøgelser, ud fra hvilke modellen kunne estimeres.

I forbindelse med København-Ringsted Baneprojektet blev der i sommeren 1998 iværksat et større modelarbejde (Nielsen m.fl., 1999c), hvoraf trafikmodellen (Nielsen, m.fl., 1999d) er gennemført af Banestyrelsen Rådgivning med TetraPlan og Hague Consult som underrådgivere. En vigtig begrundelse for projektet er, at den eksisterende bane har store kapacitets- og regularitetsproblemer. Det var således vigtigt, at modellen kunne beskrive konsekvenser heraf.

1.1 Modellens metodiske grundlag

I artiklen beskrives en videreudvikling af rutevalgmodellen fra sidste års Trafikdage. Den nye model er bl.a. i stand til at belyse passagerers reaktion på regularitetsproblemer. Modellen er probit-baseret som beskrevet i Nielsen (1997), hvorved overlappende ruter beskrives korrekt. Passagerers manglende viden om trafiknettet beskrives ligeledes af probitmodellen.

Imidlertid er modellen ændret, så den samlede køreplan benyttes i stedet for det tidligere frekvensbaserede princip. Dette er muliggjort ved at benytte den GIS-baserede netværksdatabase fra DMUs ALTRANS-projekt (Thorlacius, 1998), der rummer alle bus- og togafgange; i modellens analyseområde Øst for Lillebælt et net med ca. 260.000 kanter og 20.000 knuder.

Derudover er selve rutevalgmodellen skiftet ud med assignmentmodellen fra TPSchedule, der er udviklet af TetraPlan. Denne model er tidligere blevet anvendt til vurdering af infrastrukturinvesteringer i det danske jernbanenet, men er i forbindelse med dette projekt blevet udvidet til også at kunne håndtere stokastisk fordelte præferencer.

Rutevalgmodellen har forskellige tidsværdier for forskellige turformål og del-transportmidler (togtyper og busser), adgangs tider, frekvens (skjult ventetid), samt vente-, skifte- og

¹ Modellerne gennemgås grundigere i Camilla Riff Brems Ph.D.-Afhandling, 1999. Se også Daly (1999).

forsinkelsestider. Derudover rummer den koefficienter for siddeplads, antal skift samt omkostning. Forskelle i passagerers forskellige præferencer beskrives med fordelinger af koefficienterne i nyttefunktionerne, i modsætning til traditionelle modeller, der forudsætter samme præferencer for alle passagerer på nær tilfældige variationer.

Togforsinkelser er modelleret i en særskilt simuleringsmodel (Kaas, 1999), som giver input til rutevalgmodellen i form af diskrete forsinkelsesfordelinger for afgang og ankomster. Således overføres kapacitetsforbedringers indflydelse på regulariteten direkte til rutevalgmodellen, der beskriver passagers reaktioner herpå. Bus-regularitet og regularitet på S- og privatbaner beskrives af statistiske modeller, idet regulariteten ikke direkte berøres af Kh-Rg-projektet.

1.2 Empirisk grundlag

Modellen bygger på et omfattende empirisk grundlag bestående af det kollektive trafiknet fra ALTRANS, som blev videreudbygget i projektet (se Nielsen m.fl. 1999c), trafiktællinger, nye turmatricer, samt en række nye RP- og SP-analyser af passagerers og beboeres rejsevaner foretaget i forskellige transportmidler, via hjemmeinterview, samt via særskilte interviews i Kbh. Lufthavn Kastrup. De nyindsamlede interviews blev kombineret med en række tidligere interviewundersøgelser foretaget for Ørestadsselskabet (Ørestadmodellen, OTM) og Vejdirektoratet/Trafikministeriet (Havnetunnelmodellen).

1.3 Resultater

Den præsenterede rutevalgmodel rummer på det teoretiske niveau en række nyskabelser set i forhold til eksisterende modeller: Den kombinerer en køreplansbaseret model med en stokastisk probit-baseret model, den beskriver regularitetens betydning for passagerers adfærd, og den modellerer forskelle i passagerers præferencer (og ikke kun tilfældige variationer). På det praktiske niveau er det forfatterne bekendt første gang, at en rutevalgmodel i den skala er estimeret ud fra egentligt RP- og SP-analyser.

Den primære konklusion er, at passagerers rutevalg kan beskrives langt bedre via en egentlig nyttefunktion estimeret ud fra rejsevaneundersøgelser, end ved de mere eller mindre implicite antagelser, der er indbygget i standardsoftware. Et særligt interessant aspekt af den nye model er, at valg af del-transportmidler - f.eks. bus og forskellige togtyper – kan beskrives som del af rutevalgmodellen.

1.4 Artiklen

Artiklen introducerer i afsnit 2 den kombinerede stokastiske model for valg af rute og del-transportmiddel, mens afsnit 3 beskriver den køreplansbaserede model. Afsnit 4 gennemgår estimationen af modellen og afsnit 5 dens kalibrering og validering. Artiklen afsluttes med de vigtigste konklusioner og anbefalinger for videre forsknings og udvikling. Det bemærkes, at artiklen er en syntese af to mere teoretiske artikler; Nielsen & Jovicic (1999b) og Møller-Pedersen (1999).

2. KOMBINEREDE STOKASTISKE MODELLER FOR VALG AF RUTE OG DEL-TRANSPORTMIDDEL

Den præsenterede model afviger fra mange andre valgmodeller ved, at den tillader variation af de enkelte koefficienter i nyttefunktionen. Dette beskrives kort i det følgende, idet den traditionelle logitmodel dog først gennemgås.

2.1 Den traditionelle logit model

Diskrete valgmodeller antager, at rejsende vælger alternativ i blandt n alternativer, når i har den største nytte. En stokastisk nyttefunktion af i antages at bestå af en deterministisk del V_i og en tilfældig del ε_i jvf. formel (1):

$$U_i = V_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

Hvis den deterministiske nytte V_i kan måles, og fordelingen af ε_i , antages, så kan sandsynligheden for at vælge det enkelte alternativ udregnes. Logit modellen forudsætter, at ε_i er uafhængigt og identisk fordelt over alternativer og rejsende, samt at den følger Gumbell fordelingen. Den deterministiske nytte V_i antages yderligere ofte at være en lineær funktion af rejsetid T_i og omkostning C_i :

$$V_i = \beta_c C_i + \beta_t T_i, \quad (2)$$

Hvor β_c er omkostningskoefficienten og β_t tidskoefficienten, der begge skal estimeres.

Den implicitte tidsværdi er da det konstante forhold mellem koefficienterne $v_t = \beta_t / \beta_c$. Dette er et problem, hvis forskellige trafikanter i virkeligheden har forskellige præferencer og dermed forskellige tidsværdier. Antagelsen om konstant tidsværdi kan slækkes lidt ved at segmentere efter turformål, transportmidler og/eller indkomst, f.eks. at erhvervsrejsende har en højere gennemsnitlig tidsværdi *som gruppe* end pendlere. Imidlertid vil tidsværdien stadig være den samme for *alle personer inden for en gruppe*, idet modellen opbygges som en række sideordnede logit-modeller. I modeller med fordelte koefficienter tillades der derimod *variation af koefficienterne* inden for den enkelte gruppe.

2.2 Fordelte koefficienter

Logitmodellens manglende forklaring af systematiske variationer af personers præferencer (koefficienter) inden for en gruppe har mindre betydning, hvis antallet af alternativer er lille. Dette er som regel tilfældet ved valg af transportmiddel, hvor dimensionen af valgproblemet og antallet af koefficienter er af samme størrelsesorden. Men i rutevalgmodeller – og kombinerede modeller for valg af rute og del-transportmiddel – er antallet af alternativer langt større (tusinder) end antallet af koefficienter. Her tilknyttes den tilfældige variation, ε_i , til kantomkostningen (i den præsenterede model en vektor af 350.000 kanter, a , dvs. en stokastisk vektor ε_a), mens variationen af koefficienterne relaterer til et begrænset antal variable.

Det simpleste eksempel på fordelte koefficienter er, at kun koefficienten for tidsværdi, v_i , varierer. Det er muligt at formulere og løse dette problem eksplicit, hvis alternativerne er uaf-

hængige, den tilfældige variation er Gumbell-fordelt og der kun er to variable i nyttefunktionen, nemlig tid og omkostning. Ved den sædvanlige konstante tidsværdi v_i , er nyttefunktionen da:

$$U_i = \beta_c (c_i + v_i t_i) + \varepsilon_i \quad (3)$$

Hvis v_t antages at være logaritmisk normalfordelt i stedet for konstant, gælder:

$$\ln(v_t) \in N(\omega, \sigma^2) \quad (4)$$

Hvor $\omega = E(\ln(v_t))$ er middelværdien og σ^2 den tilsvarende varians.

Sandsynligheden for at vælge i givet at ε_i er Gumbell-fordelt og v_t er logaritmisk Normal-fordelt kan da udregnes (se Nielsen & Jovicic, 1999b, samt Ben-Akiva m.fl., 1993, for udledning af formlen). Den sædvanlige logitmodel er et særtilfælde af denne valgmodel, nemlig når v_t er konstant ($\sigma^2 = 0$).

Det bemærkes, at ovennævnte kun var ét eksempel på stokastiske koefficienter. I det følgende diskuteres andre modeller, hvor andre koefficienter varieres, samt hvor andre fordelinger benyttes.

2.3 Årsager til variation af koefficienter og til tilfældig variation

Variation af koefficienter og den tilfældige variation kan yderligere deles i variation mellem personer, og variation i den enkelte persons valg (se tabel 1). Dette leder til følgende kommentarer:

- Variationen af koefficienterne for den enkelte person kan ud fra den sædvanlige mikro-økonomiske tankegang antages at være konstant, idet den enkelte person har et konstant tids- og økonomibudget. Dette tager imidlertid ikke højde for bevidste variationer fra dag til dag, f.eks. fordi forskellige ruter eller del-transportmidler vælges for variationens skyld. En sådan variation er imidlertid vanskelig at estimere ud fra SP-data. Og RP-teknikker som turdagbøger er særdeles kostbare. Fra et adfærdsmæssigt synspunkt kan det diskuteres, hvorvidt dag-til-dag variation mellem personer skal modelleres v.h.a. den tilfældige variation eller ved variation af koefficienterne. I det følgende er det første antaget.
- Logitmodeller forudsætter, at koefficienterne, β , er identiske for den enkelte trafikant, idet den tilfældige variation ε_i antages at være identisk fordelt over alle alternativer og observationer. Hvis β varierer vil dette give et bidrag til variansen, og derved overtræde denne antagelse. Idet SP data i nærværende arbejde i det enkelte spørgsmål var begrænset til binære valg kunne ovennævnte problem imidlertid undgås (Nielsen & Jovicic, 1999b).
- Variationen af koefficienterne mellem respondenter kan estimeres direkte ud fra SP-data, hvilket også er tilfældet for den tilfældige variation.
- Omvendt kan passagerenes manglende viden om trafiknettet ikke estimeres v.h.a. SP-teknikker, idet respondenterne altid præsenteres for definerede alternativer i interviewsituationen. RP observationer af enkeltindivider over flere dage er derimod kostbare. Den bedste

estimationsmetode er derfor at køre modellen med forskellige niveauer af tilfældig variation. Og for den enkelte modelkørsel at sammenligne resultatet med aggregerede observationer som tællinger og stationsvoluminer.

Størstedelen af variationen mellem forskellige passagerer bør beskrives ved variationen af koefficienterne snarere end tilfældig variation. Dette er én af fordelene ved alle typer diskrete valgmodeller med fordelte koefficienter – endda for modeller for et begrænset antal alternativer.

Komponent	Variation	Årsag til variationen	Estimationsteknik
Variation af koefficienter	For den enkelte person	Dag-til-dag variation	Turdagbøger
		Svar i SP-eksperimenter	Variation af svar defineres til nul
	Mellem personer	Forskelle i præference	SP-teknik
Tilfældig variation, ϵ_a	For den enkelte person	Svar i SP-eksperimenter	SP-teknik
		Manglende viden om trafiknettet og anden tilfældig variation	RP-observationer af personer eller simuleringer sammenlignet med aggregerede data
	Mellem personer	Svar i SP-eksperimenter	SP-teknik
		Forskellige niveauer af viden om trafiknettet og anden tilfældig variation	Sammenligning af RP-observationer af personer

Tabel 1. *Forskellige typer fordelte koefficienter og tilfældig variation.*

2.4 Korrelerede fordelinger af tidsværdier

Modellerne præsenteret ovenfor antager, at alle koefficienter for tidselementerne er fuldt korrelerede. Imidlertid kunne man godt forvente en hvis variation mellem de enkelte tidskomponenter, f.eks. at passagerer med samme *gennemsnitlige* tidsværdi måske har *forskellige* præferencer for køretid og ventetid eller forskellige præferencer for tog versus bus. Sådanne korrelerede koefficienter er indeholdt i den præsenterede model. For en teoretisk gennemgang henvises til Nielsen & Jovicic (1999b).

Koefficienterne i nyttefunktionen findes ved at opfatte hver af dem som en stokastisk fordelt variabel, og herefter udtrække en værdi for koefficienten. Et af de største problemer ved stokastisk fordelte koefficienter er at bestemme graden af korrelation mellem de enkelte koefficienter.

Man kan vælge at opfatte koefficienterne som uafhængige stokastiske processer. Dette giver dog problemer, når man har forskellige tidsværdier for forskellige transporttyper, idet variansen af koefficienterne er så høj, at det vil give meget store forskelle mellem tidsværdierne. Modsat kan man også vælge at opfatte koefficienterne som fuldstændigt korrelerede, men herved bevares rangordningen af transporttyper for alle passagerer, og da et af formålene med at indføre stokastisk fordelte koefficienter netop er at modellere forskelle mellem passagerer, må fuld korrelation regnes for at være for restriktivt.

På grund af disse overvejelser er det i TPSchedule muligt at specificere korrelation mellem koefficienterne. Dog er dette kun implementeret for normalfordelte koefficienter. I TPSchedule simuleres koefficienterne for hver frazone i hver iteration. Disse koefficienter benyttes herefter til at udregne en generaliseret omkostning for alle strækninger. Nyttens opfattes som uaf-

hængige normalfordelte variable, hvor den generaliserede omkostning benyttes som middelværdi, og hvor variabiliteten (forholdet mellem middelværdi og varians) sættes til γ for alle strækninger.

2.5 Valg af fordeling af koefficienterne - pro og contra

Ofte antages det, at tidsværdien er korreleret med indkomsten. Idet indkomsten ofte antages at være logaritmisk normalfordelt, vil det således være rimeligt at antage, at tidsværdien også følger denne fordeling. Dette er også en fordel i forbindelse med rutevalgmodeller, idet løsningsalgoritmen kræver positive kantomkostninger, hvilket opfyldes af den logaritmiske normalfordeling. Den største ulempe med fordelingen er derimod begrænsninger i dagens estimationsteknikker (se Nielsen & Jovicic, 1999b for en nærmere diskussion heraf), samt problemer med at implementere korrelerede tidsværdier.

Normalfordelte tidsværdier gør det derimod muligt at arbejde med korrelerede koefficienter for de enkelte tidskomponenter, og estimationsteknikkerne herfor er mere udviklede. Ulempen er, at det er nødvendigt at trunkere fordelingen, eller i det mindste at trunkere nyttefunktionen, hvis den samlede nytte bliver negativ. Des større varians af fordelingen, des større skade gør dette på dens egenskaber. Dette har betydning for antagelserne bag korrelerede fordelinger, og det kan lede til uhensigtsmæssige rutevalg (jvf. tests i Nielsen, 1997).

Idet valget af fordeling – Normal versus Logaritmisk normal - ikke var åbenlyst klart, blev begge fordelinger implementeret og testet. Tabel 2 viser pro og contra ved de to fordelinger, herunder deres tilknytning til hhv. omkostning og tidsvariable.

Ønsket egenskab	Fordelt koefficient for omkostning		Fordelt tidsværdi	
	Normal	LogNormal	Normal	LogNormal
Model baseret på økonomisk teori	Delvist: Den inverse fordeling har en positiv 'hale'	Delvist: Kan transformere til fordelt tidskoefficient	Nej	Ja
Egenskaber bibeholdt i anvendelsessituationen (ingen trunkering)	Nej	Ja	Nej	Ja
Tillader variation mellem tidskomponenter	Nej	Nej	Ja, men heuristisk estimeret	Nej
Avancerede estimationsteknikker	Ja	Nej	Ja	Nej

Tabel 2. Opsummering af de egenskaber som forskellige fordelinger af koefficienter opfylder.

2.6 Tilfældig variation i nettet

Den tilfældige variation, ε_i , antages Gumbell fordelt i logitmodeller. Idet assignmentmodeller beskriver valg mellem (op til næsten uendeligt) mange ruter, bør man imidlertid foretrække en reproduktiv fordeling af den tilfældige variation, ε_a , relativt til middelværdien af nytten, hvor a refererer til den enkelte kant i trafiknettet. Dette sikrer at delvist korrelerede ruter behandles som sådan². Således skal formel (5) opfyldes:

² Sheffi (1985) giver en teoretisk gennemgang a stokastiske probit-baserede rutevalgmodeller og Nielsen (1996) giver praktiske eksempler.

$$\text{VAR}(X_a) = E(X_a) \cdot \text{err} \quad \forall X_a \quad (5)$$

Hvor *err* er den såkaldte *errorterm*, der er konstant for hele modelnettet.

Denne egenskab er i teorien sikret af Normalfordelingen. Dens koefficienter kan estimeres v.h.a. binære SP-eksperimenter, idet probitmodellen her er næsten identisk med logitmodellen. Imidlertid trunkeres modellen i praksis, hvorved formel 5 overtrædes. Dette kan lede til uhensigtsmæssige ruter, som vist af Nielsen (1997). Et bedre resultat opnås af den rektangulære fordeling, idet mange udfald heraf vil tilnærme Normalfordelingen, og sandsynligheden for trunkering sædvanligvis er lavere for det enkelte udfald. Imidlertid opnås det bedste resultat med Gamma fordelingen, der er positiv (trunkering undgås), reproduktiv (opfylder formel 5) og tilnærmer Normalfordelingen ved mange udfald.

3 DEN KØREPLANSBASEREDE MODEL

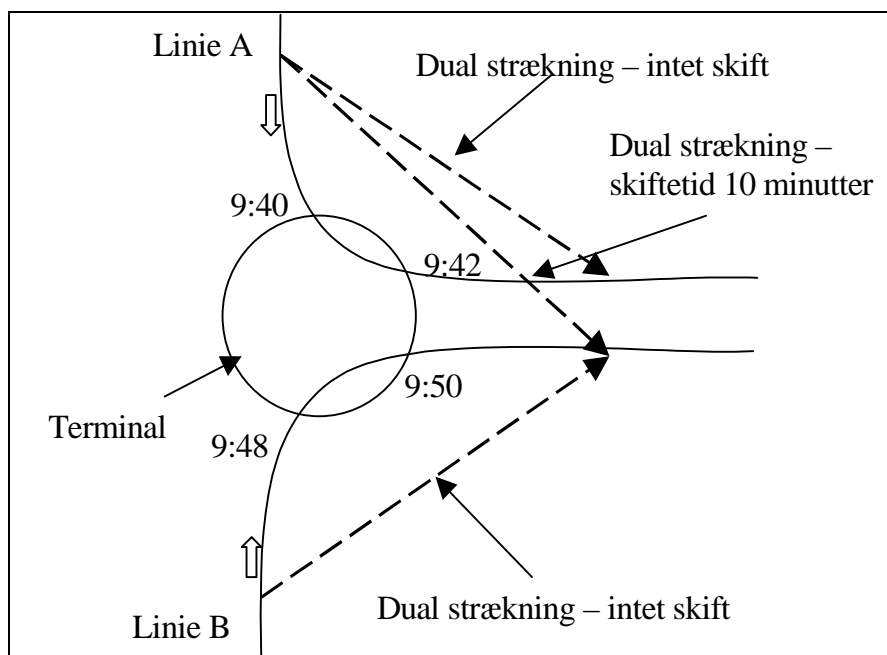
En beskrivelse af den kollektive trafikbetjening kan opdeles i tre niveauer:

- Infrastruktur (stationer, jernbaner, veje)
- Liniebeskrivelse (linieforløb, stoppesteder)
- Afgangsbeskrivelse (afgangstidspunkter, køretider)

Hvis infrastrukturnettet opfattes som en graf, svarer tilføjelsen af linie- og afgangsbeskrivelserne til at tilføje to ekstra dimensioner til netværket. Dette net vil herefter blive kaldt det *fysiske kollektive net*. Hver strækning i dette multidimensionale net svarer til et stykke af en linie (mellem to stoppesteder) for en given afgang.

3.1 Transformering af det fysiske net til et dualt netværk

Ideen i et dualt netværk er, at oprette et beregningsnet (graf), hvor hver knude svarer til en strækning i det kollektive net (se figur 1). Strækningerne i det duale net defineres nu som en tilladelig forbindelse mellem to knuder, dvs. en forbindelse fra et linieafsnit A til et andet linieafsnit B, der opfylder de krav, man ønsker at sætte



Figur 1. Princippet ved transformeringen af fysiske net til duale net i beregningsgraf.

til skift. Nogle af de mest oplagte krav er:

- Linieafsnit A's endepunkt er forbundet med linieafsnit B's startpunkt
- Ankomsttiden for A plus nødvendig skiftetid er tidligere end B's afgangstid
- Afstigning ved A's endepunkt og påstigning ved B's startpunkt er begge tilladt

Hver strækning i det duale net tilknyttes nu et antal omkostninger baseret på oplysninger om A og B samt oplysninger om skiftet fra A til B. Zone-ophængene i det duale net fås ved at forbinde zonen med afgang/ankomster fra alle relevante fysiske stoppesteder.

3.2 Løsningsalgoritme

Efter at det fysiske kollektive net er blevet beskrevet ved et dualt netværk kan almindeligt kendte algoritmer benyttes til at finde korteste veje i nettet. TPSchedule benytter en algoritme af Dijkstra-typen iterativt til at udregne omkostninger og udlægge trafikmængder i nettet. Ved starten af hver iteration n findes en nuværende løsning x^n , der består af mængder både i det duale og det fysiske kollektive net. Denne løsning benyttes til at udregne de trafikafhængige omkostninger, der indgår i udtrykket for nytten for denne iteration. Iterationen giver nu en midlertidig løsning y^n , der benyttes til at opdatere den nuværende løsning efter formel (6):

$$x^{n+1} = x^n + \lambda(y^n - x^n) \quad (6)$$

I den almindelige successive gennemsnits metode (Method of Successive Averages, MSA), har hvert skridt længden λ har værdien $1/(n+1)$. Ved at benytte MSA er det nemt at udvide algoritmen til også at behandle stokastisk fordelte nyttefunktioner. Derved opnås den såkaldte stokastisk bruger ligevægt (Stochastic User Equilibrium, SUE), der antager, at den enkelte trafikant maksimerer sin oplevede³ nytte. Løsningen på SUE er ikke den samme som *systemoptimum*.

Løsningsalgoritmen for SUE (MSA) er beskrevet og bevist i Sheffi (1985) med modifikationer hvad angår fordelte koefficienter (Nielsen, 1996), flere turformål (Nielsen, 1998a) og kollektiv trafik (Nielsen, 1999a). MSA konvergerer selv på net med stærkt asymmetriske nyttefunktioner (Nielsen m.fl. 1998b).

Disse modeller er imidlertid enten udviklet for biltrafik eller opererer på frekvensbaserede net. Det nye i nærværende arbejde er således primært implementeringen af løsningsalgoritmen til køreplansbaseret rutevalg. Herved kan modellen arbejde på et trafiknet, der rummer alle kollektive ruter (linier) og alle afgange for hver rute. Derved kan eksakte skifte- og ventetider indgå i modellen. Ud over at give en mere præcis model, gør det det muligt at beskrive, at forskellige ruter kan være optimale på forskellige tidspunkter hen over dagen. Dette indgår i modellen ved at simulere den enkelte trafikants afgangstidspunkt v.h.a. rektangulære fordelinger inden for fem tidsintervaller; 7-9, 9-15, 15-17, 17-23 & 23-7. På et bestemt tidspunkt kan passagerne derudover vælge forskellige ruter p.g.a. tilfældighed eller forskelle i deres præferencer. Således kan forskellige ruter mellem to punkter opstå p.g.a. kapacitets og kom-

³ Modellens stokastik tager højde for, at den enkelte trafikant ikke har fuldt kendskab til trafiknettet. Derfor maksimerer den enkelte trafikant sin oplevede nytte, idet vedkommende tror at han/hun vælger den optimale rute efter sin nyttefunktion. Således en anden rute i såvel virkelighed som model godt have en større nytte.

fort-forhold, i den kalibrerede model dog kun p.g.a. begrænsninger i antal siddepladser. Afgangstidspunkt, rutevalg og fordelte koefficienter baseres på simulering.

3.3 Beregning af skjult ventetid

Den skjulte ventetid modellerer forskellen mellem ønsket afrejsetidspunkt og muligt afrejsetidspunkt efter køreplanen. I TPSchedule er det muligt at dele denne tid op, så en del af den skjulte ventetid regnes som første ventetid. I KRM blev de første 6 minutter af den skjulte ventetid regnet som første ventetid. I TPSchedule tilknyttes hvert element i OD-matricen enten en kontinuert eller diskret fordeling af afgangstider. Disse fordelinger kan enten være stokastiske eller deterministiske. I hver iteration simuleres det ønskede afgangstidspunkt for en given zone, hvorefter den generaliserede omkostning af zone-ophængene kan udregnes, da det netop er på zone-ophængene, at skjult og første ventetid opsamles. Det er på tilsvarende måde muligt at modellere ønsket ankomsttidspunkt ved at justere omkostningerne på zone-ophængene, der fører fra nettet til zonerne.

3.4 Udregning af kapacitetsafhængige omkostninger

Muligheden for at få en siddeplads og eventuel afvisning på grund af overbelægning er betydningsfulde parametre i valg af transportmiddel og rute, hvorfor det er vigtigt at kunne modellere disse kapacitetsafhængige omkostninger. I TPSchedule påføres de rejsende de kapacitetsafhængige omkostninger ved påstigning af et transportmiddel. Det forudsættes altså, at ingen må opgive deres sæde undervejs på turen. Det er også muligt at blive nægtet påstigning på et transportmiddel, hvis kapacitetsgrænsen er oversteget.

De kapacitetsafhængige omkostninger udregnes inden hver iteration som funktion af de sammenvægtede belastningsgrader efter sidste iteration. Følgende funktion (formel 7) benyttes til at beregne de kapacitetsafhængige omkostninger:

$$\text{Min} \left(\alpha \left(\frac{T_{\text{beregnet}}}{T_{\text{kapacitet}}} \right)^{\beta}, \alpha_{\text{max}} \right) * f_{\text{skift}}(C_{vw}), \quad (7)$$

hvor $f_{\text{skift}}(C_{vw})$ er en funktion af de to linieafsnit v og w .

Denne formel er en BPR-formel med en øvre grænse (U.S. Bureau of Public Roads). Risikoen for ikke at få et sæde blev udregnet ved at benytte værdierne $\alpha=1$, $\beta=4$, $\alpha_{\text{max}}=1$ og definere $f_{\text{skift}}()$ så denne er 1, hvis overgangen mellem v og w involverede et skift, og 0 ellers. Nielsen (1999a) rummer en grundigere diskussion af kapacitetsforhold i kollektive transportmidler. Men grundet tidspres, manglende empirisk data samt relativ beskeden betydning for rutevalg, blev disse metoder ikke implementeret i nærværende studie.

3.5 Feedback til efterspørgselsmodellen

I assignment algoritmen summeres alle delomkostninger langs den korteste rute. Hver iteration giver derfor en mængde omkostninger for hvert OD-par. Disse omkostninger benyttes til at opdatere den sammenvægtede omkostning for dette OD-par ved hjælp af MSA-formlen. Da alle omkostninger opsamles er det derfor muligt at sikre konsistens mellem de omkostninger, der benyttes i efterspørgselsmodellen og i rutevalgsmodellen.

4 ESTIMATION AF MODELLEN

Der blev gennemført omfattende RP- og SP analyser for at kunne estimere modellen. 7900 postkort blev uddelt til bilister, samt bus- og togpassagerer. Alle poster var fordelt uden for Storkøbenhavn, idet der allerede var udført tilsvarende analyser i København i forbindelse med Ørestads- (OTM) og Havnetunnemodellen (HTM). På baggrund af de returnerede postkort blev der udvalgt 558 respondenter, for hvilke der blev udført grundigere SP-interviews. Der blev gennemført interviews for såvel præferencer for et bestemt transportmiddel som for valg mellem transportmidler. Data fra disse interviews og fra OTM og HTM blev sammen benyttet til at estimere de fordelte koefficienter. RP-data blev derimod ikke benyttet til estimation af rutevalgsmodellen, idet det er svært at estimere stærkt korrelerede variable ud fra RP-data. Der blev i første omgang estimeret to hovedmodeller, nemlig én for regionale og én for korte ture (defineret som ture inden for Hovedstadsområdet). Det afsluttende estimationsstrin samlede disse modeller til én. I alt 8.563 SP observationer dannede grundlag for modellen.

4.1 Estimering af fordelte koefficienter for omkostninger

Den første estimationsrunde tilknyttede fordelte koefficienter, γ , til omkostningen, c (se formel 8). Alle estimater var her signifikant forskellige fra 0 ved et 95% konfidensniveau for alle turformål. SP eksperimenterne præsenterede alternativer på en computerskærm for respondenterne. Værdier for forskellige variable blev i SP-eksperimentet varieret omkring de observerede værdier (klarlagt ud fra respondenternes RP-data). Niveaue af variationen blev derved forskelligt for respondenter med forskellige observerede rejsetider og omkostninger. Hvis det f.eks. blev varieret med 10% af den observerede omkostning, så ville en respondent med en omkostning på 50 kr. for den specifikke tur opleve en variation på ± 5 kr. En respondent som rejste længere og på 1. klasse betalte måske 500 kr. for en tur, hvilket giver en variation på ± 50 kr. Gennem interviews af mange respondenter, blev det muligt at estimere variationen af koefficienterne. I det ovennævnte eksempel er nyttefunktionen:

$$V_i = (\beta_c + \gamma_c \cdot \xi_c) \cdot c_i + \sum_k \beta_{tk} \cdot t_{ki} \quad (8)$$

Hvor, t_{ki} er k tidskomponenter, β_c og β_{tk} er koefficienter for omkostning og tid, γ_c standard afvigelsen af omkostningskoefficienten, og ξ_c er variationen af respondenternes præferencer.

4.2 Estimering af fordelte koefficienter for tid

Biljetomkostningen mellem to lokaliteter er som regel konstant i Danmark på grund af det zone-baserede billetsystem⁴. Således er det sjældent, at forskelle i pris er bestemmende for rutevalg. Tidskomponenterne - f.eks. køretid i forskellige del-transportmidler, vente og skiftetid - varierer derimod ofte betragteligt mellem forskellige ruter. For at kunne beskrive dette blev der estimeret en ny model, hvor den fordelte koefficient blev tilknyttet køretiden for alle transportmidler - eller rettere en såkaldt generaliseret tidskomponent. Estimation gav følgende resultater:

⁴ Bortset fra pladsbiljetomkostning for visse tog, hvilket indgår i modellen som en omkostning ved påstigning af disse tog, samt ved omvejskørsel.

- Modellerne med fordelte koefficienter på omkostninger beskrev bedre data end på tid.
- De estimerede tidsværdier var betragteligt større end i omkostningsmodellerne. De estimerede tidsværdier blev vurderet urealistisk høje.
- Nogle koefficienter var mindre signifikante i tids- end i omkostningsmodellen.

Således blev modellerne med fordelte omkostningskomponenter i første omgang foretrukket og benyttet som grundlag for den derpå følgende estimering. Resultatet kan muligvis forklares ved, at den inverse normalfordeling har en 'hale' mod højre, og derved kan den normalfordelte omkostningskoefficient delvist transformeres til en logaritmisk normalfordelt tidskoefficient. Sidstnævnte svarer bedre til antagelser fra den økonomiske teori end en normalfordelt tidskoefficient.

For at inkludere fordelte tidskoefficienterne i modellen, blev der benyttet en sekventiel estimationsprocedure. Dette skete ved at benytte estimaterne fra omkostningsmodellen i et nyt estimationstrin, hvor nyttefunktionen blev estimeret som følger:

$$V_i = \beta_c \cdot c_i + (\beta_t + \gamma_t \cdot \xi) \cdot t_{gen} \quad (9)$$

Hvor β_t er en generaliseret tidskoefficient, γ_t variation relateret hertil (standard afvigelse af β_t), og den generaliserede tid t_{gen} blev fundet ved:

$$t_{gen} = \beta_{bus} \cdot t_{bus} + \beta_{Stog} \cdot t_{Stog} + \beta_{Retog} \cdot t_{Retog} + \beta_{ICtog} \cdot t_{ICtog} + \beta_{adgang} \cdot t_{adgang} + \beta_{skjult\ vente} \cdot t_{skjult\ vente} + \beta_{vente/skifte} \cdot t_{vente/skifte} + \beta_{forsinkelse} \cdot t_{forsinkelse} \quad (10)$$

Hvor de første 4 elementer er køretider. Tog til Sverige kan såvel være regional- som IC/Lyntog. Adgangstid er den tid, det tager at komme til og fra det kollektive trafiksystem, mens den skjulte ventetid beskriver forskellen med det tidspunkt, en passager ønskede at ankomme, og den tid vedkommende faktisk ankom jvf. køreplanen.

Tidsværdierne blev først splittet mellem pendlere, studerende, erhvervs- og fritidsture. Men studerende og fritidsture blev samlet i ét segment, idet de stort set havde samme koefficienter. Såvel β_t som γ_t blev estimeret med høj signifikans for alle segmenter. Studerende / fritidsture viste sig imidlertid at have en ret høje tidsværdi samt vise lav signifikans. Fordelte omkostninger blev derfor foretrukket herfor. Tidsværdierne for pendlere og erhvervsture blev estimeret efter følgende fremgangsmåde:

- Koefficienten β_c for omkostninger blev estimeret i den generaliserede tidsmodel.
- Tidsværdien (jævnfør til den generaliserede definition i omkostningsmodellen) blev multipliceret med β_t koefficienten og skaleret (reduceret) til omkostningskoefficienten estimeret i den sidste model.
- Variationskoefficienten for tidsværdien blev udregnet ved at skalere γ_t til β_t koefficienten.

For pendlere blev der fundet en stigende tidsværdi svarende til en meget stærk modstand mod lange pendlingsafstande. Derfor blev der introduceret en speciel variabel $IC > 60$ for ture over

60 minutter. Bemærk derudover at tidsværdierne i kort-distancemodellerne (internt i Hovedstadsområdet) også var lavere end i lang-distancemodellerne (de nye interviews uden for Hovedstadsområde). Men det var svært at skelne mellem afstand og gruppe, idet respondenterne for de to turlængder stammede fra forskellige geografiske områder. Derudover ville rutevalgsalgoritmen blive mere kompliceret, hvis den skulle kunne håndtere ikke-lineære tidsværdier. Det blev derfor besluttet at samle alle interviews og estimere lineære tidsværdier.

Ud over tider og omkostninger blev følgende variable også betragtet:

- Sandsynlighed for at få en siddeplads.
- Antal skift (gene ved skift ud over en højere tidsværdi i forbindelse med skift).
- Sandsynlighed for forsinkelse (gene, der beskriver at passagerer måske er nødt til at tage en tidligere afgang for at være sikker på at ankomme til tiden – altså en gene ud over højere tidsværdi ved forsinkelser).

Efter at have vurderet resultaterne, blev skiftestrafpen fundet urealistisk stor. Dette blev forklaret med specifikke problemer i designet af spørgsmålene, samt med at designet heraf ikke i tilstrækkelig grad kunne fange korrelation mellem skiftestraf og værdi af skiftetid. Sandsynligheden for forsinkelse blev ikke signifikant – formentlig fordi denne variabel også er korreleret med tidsværdien for forsinkelser. Sidstnævnte var derimod signifikant.

Estimationsresultaterne er vist i tabel 3, med tidsværdier tilbageskrevet til 1992 priser (de nye interviews i 1998 blev sammenkoblet med ældre interviews, ligesom modellens grunddata i form af trafiknet, turmatricer, m.v. var fra 1992). Alle koefficienter er skaleret til kr./h. Den stokastiske komponent såvel som korrelationen mellem tidskoefficienterne blev ikke estimeret ud fra SP-analyserne, men blev i stedet kalibreret v.h.a. simuleringer og faglige vurderinger. De er dog inkluderet i tabellen for fuldstændighedens skyld.

5 KALIBRERING OG VALIDERING

Modellens kalibrering og validering fulgte følgende trin:

1. Trafiknettet blev testet v.h.a. forskellige GIS-baserede metoder, som korteste vejs algoritme, buffer analyser (f.eks. til at generere og checke skiftestrækninger mellem terminaler) og søgning efter manglende fiktive strækninger mellem zoner og trafiknettet.
2. De diskrete forsinkelsesfordelinger fra regularitetsmodellen blev importeret og testet.
3. Algoritmens konvergens blev testet på forskellig vis.
4. Modellen blev kørt med forskellige niveauer af tilfældighed.
5. Isokron-kort og andre tilgængelighedsmål blev udarbejdet på basis af resultaterne.
6. Typiske eller velkendte rutebunder mellem zoner, neg af ruter over bestemte strækninger, og træer af ruter fra bestemte zoner blev analyseret.
7. Afgange med lidt eller meget trafik sammenlignet med køretøjernes kapaciteter blev lokaliseret og undersøgt nærmere. Derudover blev tilsvarende kort gennemgået.

Segment	Pendlere		Erhvervsture		Uddannelse og fritid	
Antal observationer	3446		909		4208	
Variabel	Koeff.	t-værdi	Koeff.	t-værdi	Koeff.	t-værdi
Omkostning (skaleret til kr.)	1	-10.3	1	-5.3	1	-9.0
Tidsværdi for bus (Kr./h.)	35	-7.7	285	-3.1	12	-8.0
Tidsværdi for S-tog	27	-10.0	227	-2.0	9.0	-6.2
Tidsværdi for Regional og IC-tog			194	-2.6	9.1	-10.3
IC>60 min	65	-4.4				
Værdi for adgangs (til/fra nettet)	45	-7.4	270	-4.7	20	-8.5
Værdi for skjult ventetid	16	-3.6	73	-2.5	7	-7.2
Værdi for vente og skiftetid	38	-7.2	270	-3.5	28	-9.4
Tidsværdi for forsinkelse ved destinationen	49	-8.5	389	-5.8	32	-12.1
Straf for ikke at få en plads (Kr.)	2.6	-6.5	19	-2.9	3.0	-12.5
Skiftestraf (Kr.)	8.8	-4.3	64	-5.5	4.0	-10.8
Generaliseret tidskoefficient, t_{gen}	1.17	-8.5	2.5	-5.4		
Stokastik relateret til t_{gen}^1	89 %	-5.4	173 %	-2.5		
Fordeling relateret til omkostning ⁵					33 %	-6.6
ϵ_a (% af middelværdien af nyttefunktionen)	5%					
Korrelation mellem tidskomponenter	90%					

Tabel 3. Estimerede koefficienter og stokastisk heraf.

8. Specifikke kanter for bestemte trafikkomponenter blev undersøgt, f.eks. køretid i forskellige transportmidler, skifte og gangtider såvel som fiktive strækninger.
9. Total trafik på strækningsniveau blev sammenlignet med tællinger, hvor sådanne forelå.
10. Analyser af den totale trafik på stationsniveau (stationsvoluminer) blev analyseret (alle skift fra tog til andre transportmidler, inkl. gang).
11. Analyser af samme type som ovenfor, men for det enkelte turformål eller for det enkelte tidsinterval.

Det kollektive net (graf) i KRM-modellen bestod af omtrent 350.000 linieafsnit, hvilket resulterede i et dualt net med 350.000 knuder og 2.000.000 strækninger (inklusive zoneophæng til 610 zoner). På grund af det store net og opdateringen af tidsværdier og afgangstidspunkter for hver eneste zone, tog hver iteration ca. 15 minutter på en Pentium II, 400 MHz maskine. Da alle omkostninger skal opdateres for hver gang tidsværdierne simuleres, var tidsforbruget til omkostningsopdatering lige så stort som tidsforbruget til korteste vej algoritmen.

Løsningsalgoritmen simulerer for iteration i løsningsalgoritmen (MSA) hvert træ af ruter, der forlader en bestemt zone. Mange zone-par passerer typisk den enkelte strækning i det primære kollektive trafiknet. Derfor var det muligt at sikre konvergens på jernbanenettet endda for den enkelte afgang, om end en bedre konvergens blev opnået, når der blev summeret over alle afgange inden for et bestemt tidsinterval. Trafik på 'fødenettet' (f.eks. lokale busser) konverge-

rede derimod ikke så hurtigt, fordi nogle ruter kun benyttes af trafik til en enkelt eller få zoner. Således blev der ikke nødvendigvis opnået konvergens for den enkelte afgang (den enkelte bus). Derimod blev der opnået konvergens for den enkelte linie, når der blev summeret over den enkelte tidsperiode (f.eks. morgenmyldretid). Beregningstiden var meget stor (dage) selv med ovennævnte begrænsninger i antal iterationer og derved konvergens.

6 KONKLUSIONER OG PERSPEKTIVER FOR FREMTIDIG FORSKNING OG UDVIKLING

Artiklen præsenterer en ny avanceret model for valg af rute og del-transportmiddel, der er implementeret i forbindelse med Kbh.-Ringsted projektet. Modellens primære egenskaber er opsummeret i tabel 4.

Det kollektive trafiksystem, der behandles i modellen, har mange parallelle ruter og mange forskellige typer del-transportmidler, nemlig lokale busser, S- og E-busser, privatbaner, S-tog, metro, regionaltog, IC og Lyntog. Nogle af linierne har mange afgange, andre få. Derfor var det nødvendigt med en præcis beskrivelse af skifteforhold og koordinering af afgange i køreplanen.

København-Ringsted projektet har vist, at det er muligt at arbejde med eksakte køreplaner i en fuldskala model, og en del af problemerne, der opstår i frekvensaggregerede modeller (udregning af skjult ventetid, skjult ventetid og kapacitetsbegrænsninger) blev undgået. De resultater, der opnås ved at benytte køreplaner er mere detaljerede, så det nu er muligt at undersøge skiftemønstre, variation af køretid over dagen m.m. i modellen. Ligesom kapacitetsproblemer og simulering af jernbanetraffikkens forsinkelser kunne indgå (Kaas, 1999).

En anden stor fordel ved at benytte hele køreplanen er, at forskellen mellem det idealiserede modelnetværk og det faktiske netværk er lille. Dette gør det muligt at udregne flere aspekter ved afviklingen af køreplanen, eksempelvis miljøeffekter, driftsomkostninger og materielbehov. Herved blev kravene til vurdering af det konkrete projekt opfyldt. Men dette var kun muligt med en meget stor arbejdsindsats. Således er metoden mest relevant for store projekter med mange ressourcer til trafikmodellering. En sidegevinst af det konkrete arbejde, er naturligvis, at modellen nu forholdsvist overkommeligt kan benyttes til evaluering af andre projekter på Sjælland.

Implementeringen af modellen er baseret på Successive gennemsnits metode og simuleringsteknikker – for øjeblikket den eneste farbare fremgangsmåde for problemstillinger af denne kompleksitet og skala. Men modellen var selv med dagens computerkraft tung og langsom at benytte. Derudover var arbejdsindsatsen med data og definering af driftsoplæg ret stor i såvel kalibreringsåret som i anvendelsessituationen.

Således kan frekvensbaserede netværk og teknikker som i Nielsen (1999d) foretrækkes i nogle tilfælde, f.eks. hvis hele analyseområdet er urbant, med linier med høje frekvenser og med forholdsvis homogene trafikeringer, eller i situationen, hvor man grundet budgetrestriktioner er villig til at leve med mindre præcise prognoser.

På det metodiske plan har arbejdet løst en række problemer. Imidlertid kræver specielt estimeringen af de fordelte koefficienter mere grundlæggende forskning. En anden metodisk forbedring vil være at udvikle en mere præcis model for afgangstidspunkt, eller endda en fælles model for afgangstidspunkt, valg af delrute og rute.

Model element	Trafikal problemstilling	Metode og eventuelle begrænsninger
Køreplansbaseret rutevalg	Forskellige ruter kan være optimale på forskellige tidspunkter på dagen	Korteste vej på tidsafhængig graf
	Eksakt beskrivelse af tidskomponenter, inkl. skifte- og skjulte ventetider	
	Forsinkelser og mulighed for at få siddeplads	Importerede diskrete forsinkelsesfordelinger reproduceres ved simulering
	Beslutning om afgangstidspunkt	Afgangstider fordelt på 5 intervaller, der hver for sig er uniformt fordelt. En kombineret metode vil forbedre resultaterne
Forsinkelsesfordelinger	Passagerers reaktion på togforsinkelser	Importerede forsinkelsesfordelinger fra en jernbanesimuleringsmodel (UX-SIMU)
	Passagerers reaktion på busforsinkelser	Empiriske forsinkelsesfordelinger
Begrænsninger i antal siddepladser	Skift af passagerers rute og valg af deltransportmiddel, p.g.a. manglende siddepladser i bestemte afgange	SUE løsningsalgoritme (MSA). Kapacitetsfunktioner kan gøres mere avancerede
Antal skift	Besvær ved skift ud over den højere tidsværdi forbundet hermed	Del af den køreplansbaserede metode, men SP-teknik bør udvikles for at kunne skelne bedre mellem skiftetidsværdi og –straf
Koefficienter i nyttefunktionerne	Passagerers gennemsnitlige præferencer for forskellige variable	Estimeres v.h.a. SP-teknikker. Simuleres v.h.a. MSA i anvendelsessituationen
Flerklasse rutevalg	Forskellige passagergrupper / turformål har forskellige gennemsnitlige præferencer	Estimeres v.h.a. SP-teknikker. Simuleres v.h.a. MSA i anvendelsessituationen
Fordelte koefficienter	Forskelle i præferencer for tid versus omkostning mellem passagerer inden for en gruppe	Estimeres v.h.a. SP-teknikker – teori kan forbedres. MSA i anvendelsessituationen
	Forskelle i præferencer for forskellige tidskomponenter og del-transportmidler	Estimeres v.h.a. simulering – teori kan forbedres. MSA i anvendelsessituationen
Tilfældig variation	Parallele ruter (rød/blå bus problemet)	MSA baseret på Gammafordeling af nyttefunktionerne på strækningsniveau. Estimeret v.h.a. simulering sammenlignet med tællinger
	Overlappende ruter	
	Passagerers manglende viden om trafiknettet	
	Dag-til-dag variation i passagerers præferencer og valg	
	Tilfældig variation og faktorer, der ikke beskrives af de andre komponenter i modellen	

Tabel 4. Modellens vigtigste egenskaber.

Tak til: Andrew Daly, Hague Consulting Group og Christian Overgaard Hansen, TetraPlan for diskussioner og råd gennem arbejdet. Per Thorlacius, Banestyrelsen Rådgivning for design af datamodellen og de GIS-baserede metoder til at håndtere kollektive trafiknet. Dorte Filges for ledelsesassistance og jernbanespecifikke råd. Rasmus Dyhr Frederiksen for råd vedr. implementering af stokastiske fordelinger. Endelig takkes hele Kbh.-Ringsted modelteamet for deres arbejdsindsats, og projektet for finansiering af arbejdet, såvel som faglige diskussioner. Herunder takkes Jens Brix og Kirsten Jensen for diskussioner vedr. modellens specifikation i startfasen af projektet samt for hjælp til kvalitetssikring af dens resultater.

REFERENCER

- Ben-Akiva, M., Bolduc, D. & Bradley, M. (1993). Estimation of Travel Choice Models with Randomly Distributed Values of Time. *Transportation Research Record*. 1413, pp. 88-97.
- Brems, Camilla Riff (1997). Behandling af kollektiv trafik i trafikmodeller. *Trafikdage på AUC*. Konferencerapport 2, s. 403-414.
- Brems, Camilla Riff (1999). *Transport Modelling with a Focus on Public Transport*. Ph.D.-Afhandling, indsendt til forsvar. CTT/DTU.
- Daly, A. (1999). The Use of Schedule-Based Assignments in Public Transport Modelling. Publiceres ved *European Transport Forum (PTRC)*. Cambridge.
- Kaas, Anders (1999). Regularitetsmodeller for jernbaner. *Trafikdage på AUC*.
- Møller-Pedersen, J. (1999). Assignment model for timetable-based systems (TPSchedule). Publiceres ved *European Transport Forum (PTRC)*. Cambridge.
- Nielsen, O. A. (1996). Do Stochastic Traffic Assignment Models Consider Differences in Road Users Utility Functions? *24th European Transport Forum (PTRC Annual Meeting)*. Seminar M, Vol. II. Uxbridge, UK.
- Nielsen, O.A. (1997). On the distribution of the stochastic component in SUE traffic assignment models. *European Transport Forum (PTRC Annual Meeting)*. Seminar F, Transportation Planning Methods, Vol. II, p.77-94. Uxbridge, U.K.
- Nielsen, O.A. (1998a). A large-scale stochastic Multi-class Traffic Assignment Model for the Copenhagen Region. *Triennial Symposium on Transportation Analyses*. Proceedings, Part II. Puerto Rico, June.
- Nielsen, O.A., Frederiksen, R. D. & Simonsen, N. (1998b). Stochastic User Equilibrium Traffic Assignment with Turn-delays in Intersections. *International Transactions in Operational Research*. Vol. 5, No. 6, pp. 555-568. Pergamon.
- Nielsen, Otto Anker (1998c). En ny model for passagerers rutevalg i kollektiv trafik. *Trafikdage på AUC*. Konferencerapport 1, s. 137-156.
- Nielsen, O.A. (1999a). A Stochastic Transit Assignment Model Considering Differences in Passengers Utility Functions. Publiceres i *Transportation Research Part B*.
- Nielsen, O.A. & Jovicic, G. (1999b). A large-scale stochastic timetable based transit assignment model for route and sub-mode choices. Publiceres ved *European Transport Forum (PTRC)*. Cambridge.
- Nielsen, Otto Anker m.fl. (1999c). København-Ringsted modelkomplekset – fra togsimulering til samfundsøkonomi. *Trafikdage på AUC*.
- Nielsen, Otto Anker m.fl. (1999d). København-Ringsted Trafikmodellen. *Trafikdage på AUC*.
- Sheffi, Y. (1985). *Urban Transportation Networks*. Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ.
- Thorlacius, P (1998). *Beregning af rejsetider for rejse med bil og kollektiv trafik*. ALTRANS. Damarks Miljøundersøgelser, Faglig Rapport fra DMU Nr. 240.